كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق

السنة : الثانية

المقرر : التحليل (3)

الفصل : الأول

المحاضرة : (1)

التاريخ : 2013/9/29

مقدمة عن المقرر :

يدرس المقرر بشكل عام المتتاليات والمتسلسلات والنشر وتحويلات لابلاس

منطلقاً من خلاصة ما أخذ في مقرري التحليل 1 والتحليل 2 متوسعاً فيهما بشكل أكبر وبمفاهيم جديدة

المرجع المطلوب : كتاب التحليل 3 للدكتور عبد الواحد أبو حمدة

مدرس المقرر : د. عبد الواحد أبو حمدة

ملاحظات عامة :

- سيأتي في الامتحان سؤال نظري هو عبارة عن مبرهنة عليها حوالي 25 علامة.
- يمكن الاكتفاء بالمحاضرات مع العلم أن الكتاب ليس محصور بالتحليل 3 ويمكن الاستفادة منه لاحقاً في السنوات القادمة.
- كما أنه لا يوجد معيد للمقرر أي أنه لا يوجد عملي .

بعض النهايات الشهيرة :

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad ; \quad 0 < a$ ثابت , 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty$

7) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0.n^k+a_1.n^{k-1}+\ \ldots\ldots\ +a_{k-1}.\ n+a_k}{b_0.n^l+b_1.n^{l-1}+\ \ldots\ldots\ +b_{l-1}.\ n+b_l} = \begin{cases} 0 & [k<l]\ \text{عندما} \\ \frac{a_0}{b_0} & [k=l]\ \text{عندما} \\ \infty & [k>l]\ \text{عندما} \end{cases}$$

حيث أن إشارة ∞ تتحدد بحاصل قسمة إشارتي a_0 على b_0 .

8) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{1}{n} = 1$

تعريف : اللامتناهي في الصغر هو متغير نهايته صفر عندما $n \to \infty$.

تعريف أخر : يقال عن المتغير $x_n = f(n)$ أنه محدود إذا أمكن إيجاد عدد حقيقي موجب بحيث يكون : $(\forall\, n)\ |x_n| < k$.

- مثال : المتغير $x_n = \sin n$ هو متغير محدود لأنه يوجد العدد الحقيقي الموجب $k = 2$ بحيث تكون : $|x_n| = |\sin n| \le 1 < k = 2$

✓ نتيجة : (لا متناهي في الصغر) × (متغير محدود) = (لا متناهي في الصغر)

$$9)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

لأن : $\frac{1}{n}$ لا متناهي في الصغر و $\sin n$ محدود

ومنه (لا متناهي في الصغر) × (محدود) = (لا متناهي في الصغر) .

$$10)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$$

$$11)\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sin n \\ \lim\limits_{n\to\infty} \cos n \end{array}\right\} \text{غير موجودة}$$

ملاحظة :

$$\lim_{n\to\infty} x_n \to \begin{cases} \text{غير موجودة} \\ \text{موجودة} \begin{cases} \mp\infty \\ a\epsilon\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\end{cases} \end{cases} \quad ; \quad x_n = f(n)$$

$$12)\ \lim_{n\to\infty} a^n = 0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}, |a| < 1$$

مثال : $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

بملاحظة أن :

$$\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

$$13)\ \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty \quad ; \quad a > 1$$

تعريف :

المتتالية العددية : هي مجموعة من الأعداد المرقمة بوساطة الأعداد الطبيعية المغايرة للصفر .

شكلها المفصّل هو :
$$\overbrace{a_1}^{\text{الحد الأول}} \;,\; \underbrace{a_2}_{\text{الحد الثاني}} \;,\; \overbrace{a_3}^{\text{الحد الثالث}} \;, \dots ,\; \overbrace{a_n}^{\text{الحد العام}} \;, \dots$$

أما شكلها المختزل فيكتب على الشكل : $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ أو $\{a_n\}_{n\geq 1}$

✓ نهاية متتالية : هي نهاية حدها العام عندما $n \to \infty$

✓ نوع المتتالية : يقال عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها متقاربة من العدد $\propto$ إذا وفقط إذا كان :
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \propto$$

$\{a_n\}$ متقاربة $\Leftrightarrow$ نهاية حدها العام موجودة ومحدودة .
$\{a_n\}$ متباعدة $\Leftrightarrow$ نهاية حدها العام إما موجودة وغير محدودة أي تساوي $(\pm\infty)$ أو أن نهايتها غير موجودة مطلقاً .

اصطلاح :

إن قولنا (ادرس المتتالية) معناه (بيّن فيما إذا كانت متقاربة أو متباعدة ولماذا ؟)

تمرين : ادرس المتتالية التالية :
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \dots \dots$$

الحل :

إن المتتالية السابقة حدها العام هو : $\left(a_n = \frac{n}{n+1}\right)$

نحسب نهايتها عندما $n \to \infty$ فنجد :
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

وبالتالي المتتالية متقاربة من العدد 1 .

تمرين أخر : ادرس المتتالية التالية التي حدها العام :

$$a_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

وبملاحظة أن : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\text{n}} - \frac{1}{\text{n+1}}$

تذكر طريقة تفكيك الكسور :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{\text{n}} + \frac{\text{B}}{\text{n}+1}$$

ومنه $A = 1\ , B = -1$

نطبق ذلك على المتتالية فنحصل على :

$$a_n = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots \cancel{+} \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

وبالاختزال نحصل على :

$$a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

الآن نحسب نهاية الحد العام فنجد :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 - 0 = 1$$

إذاً المتتالية متقاربة من العدد 1 .

ملاحظة :

$\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right)$, حيث k عدد طبيعي مغاير للصفر.

وظيفة :

ادرس المتتاليتين التاليتين :

- $a_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$
- $a_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \cdots + \frac{1}{n(n+3)}$

تعريف :

المتسلسلة العددية : هي مجموع غير منته من الأعداد المرقمة بواسطة الأعداد الطبيعية المغايرة للصفر .

شكلها المفصل (التفصيلي) هو : $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ \ldots\ldots$

حد أول   حد ثاني   الحد العام

وشكلها المختزل هو : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- متتالية المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة هي : $\{S_n\}$

$$S_1 = a_1 \,,\ S_2 = a_1 + a_2 \ , \ldots\ldots\ldots\ldots , \underbrace{S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{\text{الحد العام}}$$

✓ نوع المتسلسلة :

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ومجموعها S $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ متقاربة من العدد S .

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ متباعدة .

اصطلاح :

إن قولنا (ادرس المتسلسلة) معناه (بيّن فيما إذا كانت متقاربة أو متباعدة ولماذا ؟)

... انتهت المحاضرة (1) ...