كلية العلوم قسم الرياضيات - جامعة دمشق

السنة : الثانية

المقرر : بنى جبرية (1)

الفصل : الأول

المحاضرة : (1)

التاريخ : 2013/09/22

مقدمة : يدرس المقرر بشكل عام (نظرية الزمر) ولكن سنبدأ أولاً بترميم معلوماتنا عن المجموعات وندرس ما نحتاجه لدراسة الزمر.

الكتاب المطلوب : كتاب البنى الجبرية (1) للدكتور حمزة إبراهيم الحاكمي

ملاحظة هامة : التمارين الموجودة في نهاية كل فقرة وفصل في الكتاب مطلوبة حتى ولو لم تُعطى.

دكتور المقرر : د. حمزة إبراهيم حاكمي

المجموعات

المجموعة : هي جملة أشياء تشترك بخاصة معينة أو تجمعها صفة مشتركة , وتتعين المجموعة بمعرفة الأشياء التي تتكون منها والتي تسمى بعناصر المجموعة.

العلاقات

تعريف : (الجداء الديكارتي)

لتكن A, B مجموعات غير خالية عندئذٍ نسمي المجموعة $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$ بالجداء الديكارتي للمجموعتين A, B

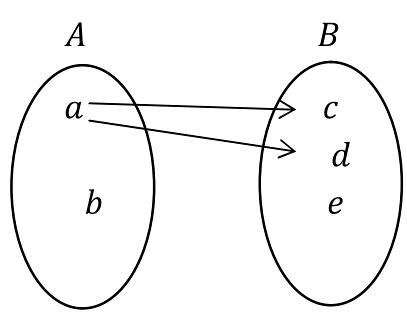
تعريف : (العلاقة)

لتكن A, B مجموعات غير خالية عندئذٍ نسمي كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A \times B$ علاقة من A إلى B

مثال بسيط للتوضيح :

$A = \{a, b\} \qquad B = \{c, d, e\}$

$Q = \{(a,c),(a,d)\} \subset A \times B$



المحاضرة (1)

العلاقات الثنائية

تعريف : لتكن P مجموعة غير خالية نسمي كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $P \times P$ علاقة ثنائية علىP

- نرمز عادة لهذه العلاقة بالرمز ρ
- إذا كانت ρ علاقة على المجموعة P وكان $(a, b) \in \rho$ فعندئذ نقول أن العنصر b يرتبط بالعنصر a وفق العلاقة ρ

ونكتب $a\rho b$ أي أنه $\forall a, b \in P$ فإن

$$(a, b) \in \rho \Leftrightarrow a\rho b$$

تعاريف :

لتكن P مجموعة غير خالية و ρ علاقة معرفة على P

1- نقول عن العلاقة ρ أنها انعكاسية إذا تحقق الشرط :

$$\forall a \in P , (a, a) \in \rho$$

2- نقول عن العلاقة ρ أنها تناظرية إذا تحقق الشرط :

$$\forall a, b \in P , (a, b) \in \rho \Longrightarrow (b, a) \in \rho$$

3- نقول عن العلاقة ρ أنها تخالفيه إذا تحقق الشرط :

$$\left.\begin{array}{r}\forall a, b \in P , (a, b) \in \rho \\ (b, a) \in \rho\end{array}\right\} \Longrightarrow a = b$$

أو بمعنى أخر

$$\forall a, b \in P : a\rho b \wedge b\rho a \Longrightarrow a = b$$

4- نقول عن العلاقة ρ أنها متعدية إذا تحقق الشرط :

$$\left.\begin{array}{r}\forall a, b, c \in P , (a, b) \in \rho \\ (b, c) \in \rho\end{array}\right\} \Longrightarrow (a, c) \in \rho$$

أو بمعنى أخر

$$\forall a, b, c \in P : a\rho b \wedge b\rho c \Longrightarrow a\rho c$$

مثال :

لتكن $P=\{1,2,3,4,5\}$

$$\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(5,3),(3,2),(2,3)\}$$

عندئذٍ نقول إن :

ρ انعكاسية

ρ ليست تناظرية لأن $(5,3)\in\rho$ ولكن $(3,5)\notin\rho$

ρ ليست تخالفيه لأن $\left.\begin{matrix}(3,2)\in\rho\\(2,3)\in\rho\end{matrix}\right\}2\neq 3$

ρ ليست متعدية لأن $(3,2)\in\rho\,,(5,3)\in\rho$ ولكن $(5,2)\notin\rho$

تعريف :

لتكن ρ *علاقة معرفة على المجموعة* P نقول عن العلاقة ρ أنها علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية.

تعريف :

لتكن ρ علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة P وليكن $a\in P$

عندئذٍ نسمي المجموعة

$$\overline{a}=\{x: x\in P, a\rho x\}\neq\emptyset$$

بصف تكافؤ العنصر a

حيث أن $\overline{a}$ تمثل مجموعة من العناصر التي تنتمي إلى P والتي تكون مرتبطة مع a وفق العلاقة ρ

- نسمي a بـ ممثل $\overline{a}$

كما نسمي المجموعة

$$P/\rho=\{\overline{a}: a\in P\}$$

بمجموعة الخارج

حيث أن P/ρ تمثل مجموعة صفوف التكافؤ

تمهيدية : (تبين العلاقة بين صفوف التكافؤ)

لتكن ρ علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة P ولتكن $a, b \in P$ عندئذٍ :

$$a \in \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b}$$

(أي أن صفا التكافؤ يتساويان إذا وفقط إذا احتوى أحدهما مُمثل صف تكافؤ العنصر الأخر)

البرهان :

لزوم الشرط : (نفرض $\bar{a} = \bar{b}$ ونبرهن أن $a \in \bar{b}$)

لنفرض أن $\bar{a} = \bar{b}$ عندئذٍ $a \in \bar{a} = \bar{b}$

كفاية الشرط : (نفرض $a \in \bar{b}$ ونبرهن أن $\bar{a} = \bar{b}$)

ليكن $x \in \bar{b}$ عندئذٍ يكون $b\rho x$

ولدينا $b\rho a$ لأن $a \in \bar{b}$

ولكن العلاقة ρ تناظرية ومنه $a\rho b$

أصبح لدينا $\begin{cases} a\rho b \\ b\rho x \end{cases}$ ومنه $a\rho x$ لأن العلاقة ρ متعدية

وبالتالي يكون $x \in \bar{a}$

$\bar{b} \subseteq \bar{a}$

لتكن $y \in \bar{a}$ عندئذٍ يكون $a\rho y$

ولدينا $b\rho a$ لأن $a \in \bar{b}$

أصبح لدينا $\begin{cases} b\rho a \\ a\rho y \end{cases}$ ومنه $b\rho y$ لأن العلاقة ρ متعدية

وبالتالي يكون $y \in \bar{b}$

$\bar{a} \subseteq \bar{b}$

مما سبق نجد أن $\bar{a} = \bar{b}$

تعريف :

لتكن P مجموعة غير خالية و $\sum$ أسرة من المجموعات الجزئية في P

نقول عن الأسرة $\sum$ أنها تشكل تجزئة للمجموعة P إذا حققت الشروط :

-1 $\forall A \in \Sigma , A \neq \emptyset$

-2 $\forall A, B \in \Sigma \quad \begin{cases} A \cap B = \emptyset & \text{إما} \\ A = B & \text{أو} \end{cases}$

-3 $P = \bigcup\limits_{B \in \Sigma} B$

تمهيدية : (تبين لنا كيفية الحصول على تجزئة من خلال علاقة التكافؤ P)

لتكن ρ علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة P فإن المجموعة P/ρ تشكل تجزئة للمجموعة P .

البرهان :

1) لتكن $\bar{a} \in P/\rho$ حيث $a \in P$

بما أن $a \in \bar{a}$ فإن $\bar{a} \neq \emptyset$

2) ليكن $\bar{a}, \bar{b} \in P/\rho$ حيث $a, b \in P$

فإذا كان $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ تم المطلوب

ولنفرض أن $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$

فعندئذٍ يوجد $\left.\begin{matrix} d \in \bar{a} \Longrightarrow \bar{d} = \bar{a} \\ d \in \bar{b} \Longrightarrow \bar{d} = \bar{b} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \bar{a} = \bar{b}$

3) (نعلم أن كل مجموعة يمكن كتابتها على شكل مجموعاتها الجزئية وحيدة العنصر)

$$P = \bigcup_{a \in P} \{a\} \subseteq \bigcup_{\bar{a} \in \frac{P}{\rho}} \bar{a} \subseteq P$$

ومنه $P = \bigcup\limits_{\bar{a} \in \frac{P}{\rho}} \bar{a}$

مما سبق نجد أن المجموعة $\frac{P}{\rho}$ تشكل تجزئة للمجموعة P

مبرهنة : (تبين العلاقة بين التجزئة وعلاقة التكافؤ)

لتكن $\sum$ تجزئة للمجموعة P

فإن العلاقة ρ المعرفة بالشكل :

$$\forall\, a,b \in P\,,\ a\,\rho b \Leftrightarrow \exists B \in \Sigma : a,b \in B$$

هي علاقة تكافؤ على المجموعة P

الإثبات :

ليكن $a \in P$ عندئذٍ $a \in \bigcup_{A\in\sum} A$

ومنه يوجد $B \in \Sigma$ بحيث $a,a \in B$

وبالتالي يكون $a\rho a$ ومنه ρ انعكاسية

ليكن $a,b \in P$ بحيث $a\rho b$ و حسب التعريف فإنه يوجد $D \in \Sigma$ بحيث $a,b \in D$
وأن $b,a \in D$

$b\rho a$ ومنه ρ تناظرية

ليكن $a,b,c \in P$ بحيث $a\rho b\ ,\ b\rho c$

بما أن $a\rho b$ فإنه يوجد $K \in \Sigma$ بحيث $a,b \in K$

$H \in \Sigma$ $b,c \in H$

ومنه $b \in K \cap H$ وبما أن $\sum$ تجزئة نجد

$K = H$ ومنه $a,c \in K$

وبالتالي $a\rho c$ ومنه ρ متعدية

ومما سبق تكون ρ علاقة تكافؤ

... انتهت المحاضرة ...