كلية العلوم قسم الرياضيات - جامعة دمشق　　　　　السنة : الثالثة

المقرر : البنى الجبرية (3)　　　　　الفصل : الأول

المحاضرة : (5)　　　　　التاريخ : 2013/10/20

مناقشة :

إن المبرهنتين المدروستين في المحاضرة السابقة غير صحيحتين من أجل التشاكلات المودولية .

فمثلا إذا أخذنا التشاكلين المودليين :

$$f:\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad\qquad g:\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(z) = 2z \qquad\qquad z \longmapsto z$$

فنجد أن المبرهنة الأولى ليست صحيحة لأن : فحسب المبرهنة يوجد $h:\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ بحيث يكون :

$$hof(x) = g(x) \Rightarrow h\big(f(x)\big) = x \Rightarrow f(2x) = x \Rightarrow 2h(x) = x$$

وهي معادلة غير محققة دوما .

مبرهنة $(6-2)$: إذا كان $f:A \longrightarrow B$, $g:A \longrightarrow C$ تشاكلين مودوليين وكان f غامر ,

فإن القضيتين التاليتين متكافئتين :

1- يوجد تشاكل مودولي وحيد : $h:B \longrightarrow C$ ويحقق $hof = g$

2- $kerf \subseteq kerg$.

الإثبات : $(2 \Longleftarrow 1)$: أيا كان $a \in kerf$ فإن $f(a) = 0_B$ عندئذٍ :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f\ \text{غامر}"'] & C \\ B \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

$$g(a) = h\big(f(a)\big) = \overbrace{h(0) = 0}^{\text{لأنه تشاكل}}$$

أي $a \in kerg$ ومنه يكون $kerf \subseteq kerg$

$(1 \Leftarrow 2)$: لنفرض أنّ $f(a_1) = f(a_2)$ حيث $a_1, a_2 \in A$

$$f(a_1 - a_2) = 0 \Longrightarrow a_1 - a_2 \in kerf$$

$$\overset{\text{من } 2}{\Longrightarrow} a_1 - a_2 \in kerg \Longrightarrow g(a_1 - a_2) = 0 \Longrightarrow g(a_1) - g(a_2) = 0 \Longrightarrow g(a_1) = g(a_2)$$

وبالتالي يوجد تطبيق $h: B \longrightarrow C$ يحقق : $hof = g$

إنّ h تشاكل مودولي لأن :

أيا كان $b_1, b_2 \in B$ و $\alpha, \beta \in R$ فإنه يوجد $a_1, a_2 \in A$ بحيث :

$b_i = f(a_i)\ ;\ i = 1,2$ لأنّ f غامر

وعندئذٍ يكون :

$$h(\alpha b_1 + \beta b_1) = h\big(\alpha f(a_1) + \beta f(a_2)\big) = \overbrace{h\big(f(\alpha a_1 + \beta a_2)\big)}^{\text{لأن } f \text{ تشاكل}} = \overbrace{g(\alpha a_1 + \beta a_2)}^{g=hof}$$

$$= \alpha g(a_1) + \beta g(a_2) = \alpha h\big(f(a_1)\big) + \beta h\big(f(a_2)\big) = \alpha h(b_1) + \beta h(b_2)$$

كما أنّ h وحيد :

لأنه إذا كان $k: B \longrightarrow C$ تشاكل آخر يحقق $kof = g$ وبالتالي يكون :

$$hof = kof$$

و بما أنّ f غامر فهو قابل للاختزال من اليمين وبالتالي يكون : $h = k$ فهو وحيد .

زد على ذلك : h متباين $\Leftrightarrow$ $kerf = kerg$

لأنه إذا كان f متباين فإن $kerg \subseteq kerf$ لأنّ :

أيا كان $a \in kerg$ ، فإن $g(a) = 0$ وبالتالي $\overbrace{hof(a)}^{hof=g} = 0$

$$h\big(f(a)\big) = 0 \Longrightarrow f(a) = 0 \Longrightarrow a \in kerf$$

أصبح لدينا $\overbrace{kerg \subseteq kerf}^{\text{برهانا}}$, $\overbrace{kerf \subseteq kerg}^{\text{فرضا}}$ ومن الاحتوائين يكون $kerf = kerg$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f\ \text{غامر}"'] & C \\ B \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

لنفرض أخيرا أنّ $kerf = kerg$ ولنبرهن على أن h متباين.

أيا كان $b \in kerh$ فإن $h(b) = 0$

وبما أن f غامر فإنه من أجل العنصر b يوجد $a \in A$ بحيث

$b = f(a)$ وبالتالي يكون $h(f(a)) = 0$

$$\Rightarrow g(a) = 0 \Rightarrow a \in kerg = kerf \Rightarrow f(a) = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow$$ h متباين

مبرهنة $(7-2)$: إذا كان $f: B \longrightarrow A \;,\; g: C \longrightarrow A$ تشاكلين مودوليين وكان f متباين فإن القضيتين التاليتين متكافئتين :

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ B \arrow[r, "f\ \text{متباين}"'] & A \end{tikzcd}$$

1ـ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: C \longrightarrow B$ يحقق :

$$foh = g$$

2ـ $Img \subseteq Imf$.

الإثبات : $(1 \Leftarrow 2)$: واضح حسب المبرهنة في المحاضرة السابقة حيث كل تشاكل هو تطبيق .

$(2 \Leftarrow 1)$: بما أن $Img \subseteq Imf$ فإنه يوجد تطبيق $h: C \longrightarrow B$ يحقق : $foh = g$

كما أن h تشاكل لأنه أيا كان $c_1, c_2 \in C \;,\; \alpha, \beta \in R$ فإن :

$$f\big(h(\alpha c_1 + \beta c_2)\big) = g(\alpha c_1 + \beta c_2) = \alpha g(c_1) + \beta g(c_2)$$

$$= \alpha f\big(h(c_1)\big) + \beta f\big(h(c_2)\big) = f\big(\alpha h(c_1) + \beta h(c_2)\big)$$

وبما أن f متباين فإن :

$$h(\alpha c_1 + \beta c_2) = \alpha h(c_1) + \beta h(c_2)$$

كما أن h وحيد لأنه إذا كان $k: C \longrightarrow B$ تشاكل مودولي يحقق $kof = g$ فإن :

$$fok = foh$$

وبما أن f متباين فهو قابل للاختصار من اليسار فيكون $h = k$.

زد على ذلك : h غامر $\Leftrightarrow$ $Imf = Img$.

لنفرض أن h غامر , لدينا :

أيا كان $a = f(b) \in Imf$

بما أن h غامر فإنه من أجل العنصر b يوجد $c \in C$ بحيث $b = h(c)$ وبالتالي :

$$a = f(b) = f\big(h(c)\big) = g(c) \in Img$$

أي أن $Imf \subseteq Img$ ولدينا $Img \subseteq Imf$ وبذلك يكون $Imf = Img$.

أخيرا لنفرض أن $Img = Imf$ ولنبرهن أن h غامر , وذلك كما يلي :

أيا كان $b \in B$ وبالتالي $f(b) \in Imf = Img$ وبالتالي يوجد $c \in C$ بحيث :

$$f(b) = g(b) = f\big(h(c)\big) \Longrightarrow \overbrace{b = h(c)}^{\text{كون } f \text{ متباين}}$$

ومنه يكون h غامر.

... انتهت المحاضرة الخامسة ...