

كلية العلوم قسم الرياضيات - جامعة دمشق

السنة : الثالثة

المقرر : البنى الجبرية (3)

الفصل : الأول

المحاضرة : (5)

التاريخ : 2013/10/20

مناقشة :

إن المبرهنتين المدرستين في المحاضرة السابقة غير صحيحتين من أجل التشاكلات المودولية .

فمثلا إذا أخذنا التشاكلين المودليين :

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(z) = 2z \qquad z \mapsto z$$

فنجد أن المبرهنة الأولى ليست صحيحة لأن : فحسب المبرهنة يوجد $h: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ بحيث يكون :

$$hof(x) = g(x) \Rightarrow h(f(x)) = x \Rightarrow f(2x) = x \Rightarrow 2h(x) = x$$

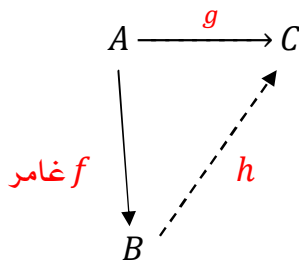
وهي معادلة غير محققة دوما .

مبرهنة (2 - 6) : إذا كان $f: A \longrightarrow B$, $g: A \longrightarrow C$ تشاكلين مودوليين وكان f غامر ,

فإن القضيتين التاليتين متكافئتين :

1- يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: B \longrightarrow C$: ويحقق $hof = g$

2- $kerf \subseteq kerg$.



الإثبات : (1 \Leftarrow 2) : أي كان $a \in kerf$ فإن $f(a) = 0_B$ عندئذ :

$$g(a) = h(f(a)) = \overbrace{h(0)}^{\text{لأنه تشاكل}} = 0$$

أي $a \in kerg$ ومنه يكون $kerf \subseteq kerg$

المباخررة (5)

(1 \Leftarrow 2) : لنفرض أن $f(a_1) = f(a_2)$ حيث $a_1, a_2 \in A$

$$f(a_1 - a_2) = 0 \Rightarrow a_1 - a_2 \in \ker f$$

من 2
 $\Rightarrow a_1 - a_2 \in \ker g \Rightarrow g(a_1 - a_2) = 0 \Rightarrow g(a_1) - g(a_2) = 0 \Rightarrow g(a_1) = g(a_2)$

وبالتالي يوجد تطبيق $h: B \longrightarrow C$ يحقق $hof = g$

إن h تشاكل مودولي لأن :

أيا كان $b_1, b_2 \in B$ و $\alpha, \beta \in R$ فإنه يوجد $a_1, a_2 \in A$ بحيث :

$$b_i = f(a_i); i = 1, 2$$

وعندئذ يكون :

$$\begin{aligned} h(\alpha b_1 + \beta b_2) &= h(\alpha f(a_1) + \beta f(a_2)) = \overbrace{h(f(\alpha a_1 + \beta a_2))}^{\text{لأن } f \text{ تشاكل}} = \overbrace{g(\alpha a_1 + \beta a_2)}^{g=hof} \\ &= \alpha g(a_1) + \beta g(a_2) = \alpha h(f(a_1)) + \beta h(f(a_2)) = \alpha h(b_1) + \beta h(b_2) \end{aligned}$$

كما أن h وحيد :

لأنه إذا كان $k: B \longrightarrow C$ تشاكل آخر يحقق $kof = g$ وبالتالي يكون :

$$hof = kof$$

وبما أن f غامر فهو قابل للاختزال من اليمين وبالتالي يكون : $h = k$ فهو وحيد .

زد على ذلك : h متباين $\Leftrightarrow \ker f = \ker g$

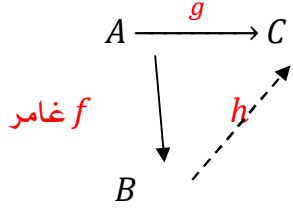
لأنه إذا كان f متباين فإن $\ker g \subseteq \ker f$ لأن :

$$\overbrace{hof(a) = 0}^{hof=g} \text{ وبالتالي } g(a) = 0, \text{ فإن } a \in \ker g$$

$$h(f(a)) = 0 \Rightarrow f(a) = 0 \Rightarrow a \in \ker f$$

أصبح لدينا $\overbrace{\ker g \subseteq \ker f}^{\text{برهانا}}, \overbrace{\ker f \subseteq \ker g}^{\text{فرضا}}$ ومن الاحتوائين يكون $\ker f = \ker g$.

المحاورة (5)



لنفرض أخيراً أن $\ker f = \ker g$ ولنبرهن على أن h متباين .

أيما كان $b \in \ker h$ فإن $h(b) = 0$

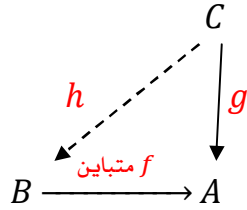
وبما أن f غامر فإنه من أجل العنصر b يوجد $a \in A$ بحيث

$$h(f(a)) = 0 \text{ وبالتالي يكون } b = f(a)$$

$$\Rightarrow g(a) = 0 \Rightarrow a \in \ker g = \ker f \Rightarrow f(a) = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow h \text{ متباين}$$

مبرهنة (2 - 7): إذا كان $g: C \longrightarrow A$, $f: B \longrightarrow A$ تشاكلين مودوليين وكان f متباين

فإن القضييتين التاليتين متكافئتين :



1- يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: C \longrightarrow B$ يحقق :

$$foh = g$$

2- $Img \subseteq Imf$

الإثبات: (1 \Leftarrow 2): واضح حسب المبرهنة في المحاضرة السابقة حيث كل تشاكل هو تطبيق .

(2 \Leftarrow 1) : بما أن $Img \subseteq Imf$ فإنه يوجد تطبيق $h: C \longrightarrow B$ يحقق : $foh = g$

كما أن h تشاكل لأنه أيما كان $c_1, c_2 \in C$, $\alpha, \beta \in R$ فإن :

$$\begin{aligned} f(h(\alpha c_1 + \beta c_2)) &= g(\alpha c_1 + \beta c_2) = \alpha g(c_1) + \beta g(c_2) \\ &= \alpha f(h(c_1)) + \beta f(h(c_2)) = f(\alpha h(c_1) + \beta h(c_2)) \end{aligned}$$

وبما أن f متباين فإن :

$$h(\alpha c_1 + \beta c_2) = \alpha h(c_1) + \beta h(c_2)$$

كما أن h وحيد لأنه إذا كان $k: C \longrightarrow B$ تشاكل مودولي يحقق $kof = g$ فإن :

$$fok = foh$$

وبما أن f متباين فهو قابل للاختصار من اليسار فيكون $h = k$.

المحاضرة (5)

زد على ذلك : h غامر $\Leftrightarrow Imf = Img$.

لنفرض أن h غامر , لدينا :

أيا كان $a = f(b) \in Imf$

بما أن h غامر فإنه من أجل العنصر b يوجد $c \in C$ بحيث $b = h(c)$ وبالتالي :

$$a = f(b) = f(h(c)) = g(c) \in Img$$

أي أن $Imf \subseteq Img$ ولدينا $Img \subseteq Imf$ وبذلك يكون $Imf = Img$.

أخيرا لنفرض أن $Imf = Img$ ولنبرهن أن h غامر , وذلك كما يلي :

أيا كان $b \in B$ وبالتالي $f(b) \in Imf = Img$ وبالتالي يوجد $c \in C$ بحيث :

$$f(b) = g(b) = f(h(c)) \Rightarrow \overbrace{b = h(c)}^{f \text{ متباين}}$$

ومنه يكون h غامر.

... انتهت المحاضرة الخامسة ...