كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق | السنة: الثالثة

المقرر: التحليل العقدي (1) | الفصل: الأول

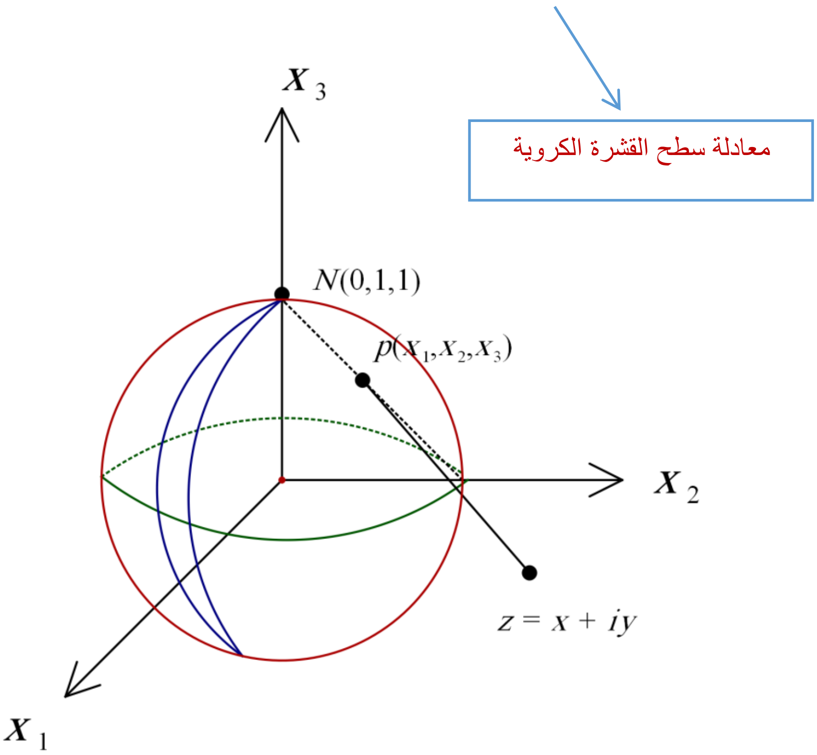
المحاضرة: (6) | التاريخ:2013/10/23

كرة ريمان :

وهي كرة يتم تمثيل الأعداد العقدية عليها.

لنأخذ كرة الواحدة في R^3 ولتكن :

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$



ونضع $N(0,0,1)$ القطب الشّمالي للكرة S وليكن C منطبق على المستوي $(\overrightarrow{ox_1}, \overrightarrow{ox_2})$

من أجل $z = x + iy$ من C نصل بين z و N بمستقيم فيقطع الكرة S بنقطة وحيدة ولتكن $P(x_1, x_2, x_3)$ وبالتالي نلاحظ وجود تقابل بين نقط المستوي C ونقط الكرة S وهو ما نسميه بالإسقاط المجسادي.

- إذا كان $|z| > 1$ فإن P تقع على نصف الكرة الشمالي
- إذا كان $|z| < 1$ فإن P تقع على نصف الكرة الجنوبي
- إذا كان $|z| = 1$ فإن P تقع على دائرة الاستواء أي $(P = z)$
- كذلك عندما $z \longrightarrow \infty$ فإنَّ $P \longrightarrow N$

نلاحظ أنَّ معادلة المستقيم الواصل بين $z(x, y, 0)$ و $N(0,0,1)$ كما يلي:

$$\frac{x_1 - x}{0 - x} = \frac{x_2 - y}{0 - y} = \frac{x_3 - 0}{1 - 0} = t \quad ; \quad -\infty \le t \le +\infty$$

ومنه $x_1 = (1 - t)x, x_2 = (1 - t)y, x_3 = t$

نعوض في معادلة كرة ريمان فنجد:

$$x^2 + (1 - \mathrm{t})^2 + y^2(1 - t)^2 + t^2 = 1$$

$$x^2 + x^2t^2 - 2x^2t + y^2 + y^2t^2 - 2y^2t + t^2 - 1 = 0$$

$$|z|^2 + |z|^2t^2 - 2t|z|^2 + t^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (|z|^2 + 1)t^2 - (2|z|^2)t + |z|^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 4|z|^4 - 4(|z|^4 - 1) = 4|z|^4 - 4|z|^4 + 4 = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 2 \Rightarrow t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\,|z|^2 - 2}{|z|^2 + 1} = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

للحفظ

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1} \;,\; x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1} \;, x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}}$$

تذكرة: معادلة مستقيم في الفراغ معين بنقطتين $A\ (x_1, y_1, z_1)$ و $B\ (x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t$$

قوانين الإسقاط المجسادي:

وبالعكس إذا كانت $P(x_1, x_2, x_3$ معلومة عندئذٍ z تتعين بدلالة P كما يلي:

للحفظ $z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$

تمرين:

أوجد صورة كل من الأعداد العقديّة التالية على كرة ريمان:

1) $z_1 = 2 + 2i$

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1} = \frac{2(2)}{8+1} = \frac{4}{9}$$

$$x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1} = \frac{2(2)}{8+1} = \frac{4}{9}$$

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} = \frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow P_1\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

نتحقق من أنَّ $P \in S$ وذلك بأنّ نعوض في معادلة S ويجب أن تحققها :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{16+16+49}{81} = 1$$

2) $z_2 = 3 + 4i \Rightarrow P_2\left(\frac{6}{26}, \frac{8}{26}, \frac{24}{26}\right)$

3) $z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \Rightarrow P_3 = z \Rightarrow P_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

4) $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \Rightarrow P_4\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

تمرين: لتكن $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ نقطة من كرة ريمان والمطلوب أوجد العدد العقدي المقابل لهذه النقطة في المستوي العقدي

الحل: $z = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)$

وظيفة :

أوجد صورة كل من الأعداد العقدية التالية على كرة ريمان :

$$z_1 = -4 + 3i \ , z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i, \ z_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} i$$

... انتهت المحاضرة (6) ...