المعادلات التفاضلية المتجانسة :

تعريف :

نقول عن الدالة $f(x,y)$ التابعة لمتحولين x,y أنهما متجانسان من الدرجة n إذا حققت العلاقة :

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda f(x,y)$$

تعريف أخر :

نقول عن المعادلة التفاضلية $y'=f(x,y)$ أنها متجانسة إذا كانت الدالة $f(x,y)$ متجانسة.

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية بالشكل :

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

إذا كانت الدالتان $Q(x,y),P(x,y)$ متجانستان

نحل المعادلة التفاضلية المتجانسة بفرض التحويل التالي :

$$z=\frac{y}{x}$$

ومنه فإن

$$\{y=x.z\}\Rightarrow y'=z+xz'$$

بعد التعويض في المعادلة التفاضلية المتجانسة نحصل على معادلة تفاضلية ذات متحولات قابلة للفصل.

مثال (1) :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

الحل :

نعوض كل x بـ λx ; وكل y بـ λy

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\lambda x+\lambda y}{\lambda x-\lambda y}=\frac{\lambda(x+y)}{\lambda(x-y)}=\frac{x+y}{x-y}$$

لم يتغير شكل المعادلة فهي معادلة تفاضلية متجانسة

نفرض التحويل : $z = \frac{y}{x}$

نقسم على x :

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{1 + z}{1 - z}$$

ولكن لدينا :

$$y = xz \Longrightarrow y' = z + xz'$$

$$xz' = \frac{1 + z}{1 - z} - z$$

$$xz' = \frac{1 + z - (1 - z)z}{1 - z}$$

$$xz' = \frac{1 + z - z + z^2}{1 - z}$$

$$\Longrightarrow xz' = \frac{1 + z^2}{1 - z}$$

ذات قابلة للفصل :

$$\Longrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{1 + z^2}{1 - z}$$

بفصل المتحولات :

$$\Longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1 - z}{1 + z^2}dz$$

$$ln|x| + ln|c| = \int \frac{1}{1 + z^2}dz - \int \frac{z}{1 + z^2}dz$$

$$\Longrightarrow ln|x| = \arctan(z) - \frac{1}{2}ln|1 + z^2|$$

مثال (2) :

$$y' = \frac{y}{x} + t\,g\ (\frac{y}{x})$$

الحل :

إذا عوضنا كل x بـ λx ; وكل y بـ λy لا تتغير شكل المعادلة التفاضلية $\Leftarrow$ هي معادلة متجانسة.

نفرض التحويل :

$$z = \frac{y}{x}$$

$$y = xz \Longrightarrow\ y' = z + xz'$$

$$z + xz' = z + tg(z)$$

$$\Longrightarrow xz' = tg(z)$$

$$\Longrightarrow x.\frac{dz}{dx} = tg(z)$$

$$\Longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{tg(z)}$$

$$\Longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{\cos(z)}{\sin(x)}dz$$

$$\Longrightarrow ln|x| + ln|c| = ln|\sin z|$$

$$ln|x| = ln|\sin z| - ln|c|$$

$$ln|x| = \ln\left|\frac{\sin z}{c}\right|$$

$$x = \left|\frac{\sin z}{c}\right| \Longrightarrow \left|\sin\frac{y}{x}\right| = x.c$$

ملاحظة :

توجد لدينا معادلات تفاضلية غير متجانسة لحلها نردها إلى معادلة تفاضلية متجانسة ومنه ترد إلى معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات.

$$y' = f(ax + by + c) \text{ ....(1)}$$

لحلها نفرض :

$$z = ax + by + c$$

$$\boxed{dz = a.dx + b.dy}$$

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \text{ ....(2)}$$

نلاحظ أن :

$$D: ax + by + c$$

$$D_1 = a_1x + b_1y + c_1$$

عبارة عن مستقيمين

نميز هنا ثلاث حالات :

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \lambda \quad (1$$

$$y' = f(\lambda) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(\lambda)$$

$$\Rightarrow dy = f(\lambda)dx$$

$$\Rightarrow y = \int f_1(\lambda)\, dx + c$$

2) $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \lambda \neq \frac{c}{c_1}$ مستقيمين متوازيين

$$y' = f\left(\frac{\lambda(ax+by)+c}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_1}\right)$$

لحلها نفرض :

$$z = ax + by$$

$$dz = adx + bdy$$

$$\frac{dz}{dx} = a + b.\frac{dy}{dx}$$

3) $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$ مستقيمين متقاطعين

نفرض نقطة تقاطع المستقيمين هي (α,β)

ونميز بين التحويل :

$$x = X + \alpha$$

$$y = Y + \beta$$

... انتهت المحاضرة (4) ...