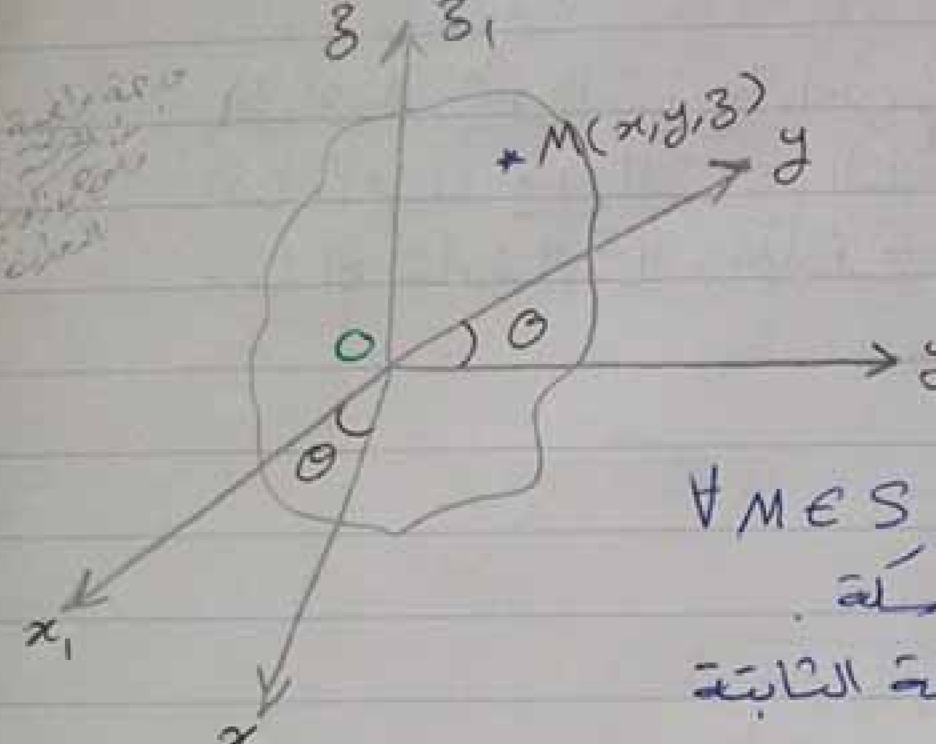
المحاضرة الخامسة

24/10/2013

الدراسة التحليلية:

نختار جملة المحاور الثابتة $O_1x_1y_1z_1$ بحيث يكون Oz_1 منطبق على محور الدوران

و نختار جملة المحاور المتماسكة مع الجسم $Oxyz$ بحيث أحد محاورها منطبق على محور الدوران وليكن Oz حيث O_1 أيضاً منطبقة على O

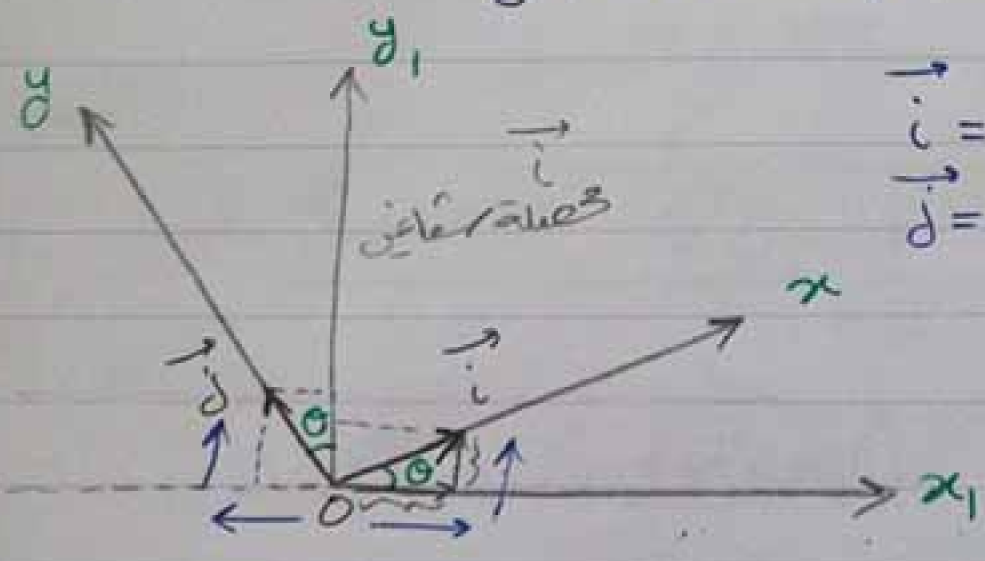


$\forall M \in S : \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

إحداثيات M في الجملة المتماسكة.

و لنوجد إحداثيات M في الجملة الثابتة نقوم بالإسقاط:

$$\vec{O_1M} = \vec{OM} = x(\cos\theta\,\vec{i_1} + \sin\theta\,\vec{j_1}) + y(-\sin\theta\,\vec{i_1} + \cos\theta\,\vec{j_1}) + z\vec{k_1}$$



بالإسقاط:

$$\vec{i} = \cos\theta\,\vec{i_1} + \sin\theta\,\vec{j_1}$$

$$\vec{j} = -\sin\theta\,\vec{i_1} + \cos\theta\,\vec{j_1}$$

$$\rightarrow \vec{O_1M} = (x\cos\theta - y\sin\theta)\vec{i_1} + (x\sin\theta + y\cos\theta)\vec{j_1} + z\vec{k_1}$$

و بالتالي

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y_1 &= x\sin\theta + y\cos\theta \\ z_1 &= z \end{aligned}\right\}$$

وهي مركبات $\vec{OM}$ على الجملة الثابتة $Ox_1y_1z_1$

توزيع السرع تحليلياً :

$$\forall M \in S;\ \vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

السرعة تحليلياً:

بالإسقاط على الجملة المتماسكة:

$$\vec{v}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \theta' = \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-y\theta')\vec{i} + (x\theta')\vec{j}$$

أمّا على الجملة الثابتة نجد مايلي:

$$\vec{V}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \omega = \theta' \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = -y_1\theta'\,\vec{i_1} + x\theta'\,\vec{j_1}$$

ملاحظة: يمكن إيجاد شعاع السّرعة على الجملة الثّابتة يمكننا الاشتقاق مباشرة لشعاع الموضع:

$$V(M) = (x_1', y_1', z_1')$$

أمّا على الجملة الثّابتة لا يمكن ذلك.

التسارع تحليلياً: على الجملة الثابتة:

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)$$ أو للمسائل

$$= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} - \omega^2 \vec{OM}$$

على الجملة المتماسكة :

$$\vec{\Gamma}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon = \theta'' \\ x & y & z \end{vmatrix} - \underset{\theta'^2}{\underset{\parallel}{\omega^2}}(x, y, z)$$

$$= (-\theta'' y - \theta'^2)\vec{i} + (\theta'' x - \theta'^2 y)\vec{j} - \underbrace{\theta'^2 z \vec{k}}_{\text{ليست دائما موجودة}}$$

أمّا على الجملة الثابتة :

$$\vec{\Gamma}(M) = (-\theta'' y_1 - \theta'^2 x_1)\vec{i}_1 + (\theta'' x_1 - \theta'^2 y_1)\vec{j}_1$$

أو بالاشتقاق المباشر لـ $\vec{v}(M)$ على الثابتة :

$$\vec{\Gamma}(M) = (x_1'', y_1'', z_1'')$$

الحركة المماسة للحركة الدورانية حول محور ثابت :

تعريف:

إذا انعدمت سرعة نقاط مستقيم متماسك من الجسم الصلب في لحظة واحدة فقط عندئذٍ نقول أنّ حركة الجسم في هذه اللحظة هي مماسة لحركة دورانية حول محور ثابت

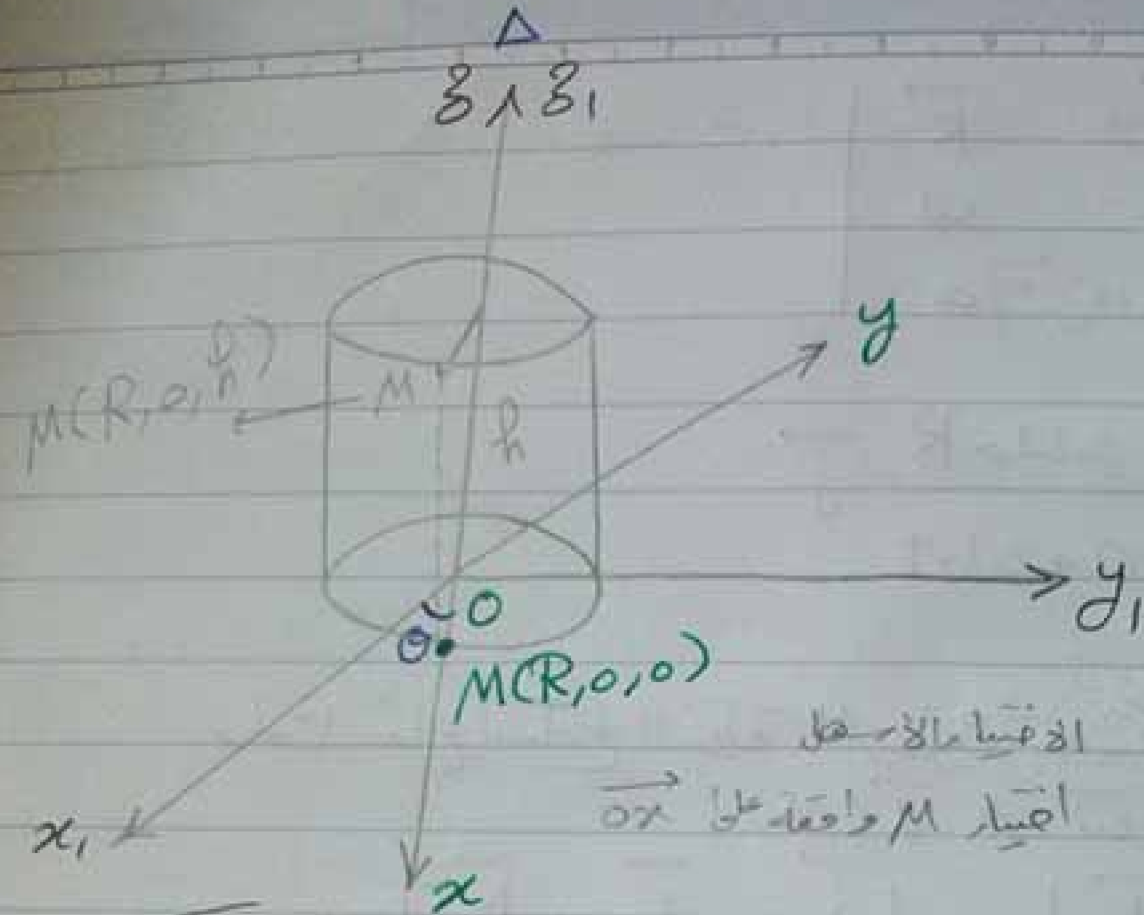
مسألة: تتحرك اسطوانة دائرية حول محورها الثابت معادلة حركتها هي : $\theta = a \ln\left(1 + \frac{\omega_0}{a} t\right)$ و (ω_0, a) ثوابت والمطلوب:

1- عين شعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي.

2- عين سرعة وتسارع النقطة التي تبعد عن محور الدوران بالمقدار R حيث R نصف قطر الاسطوانة

3- عين قيمة كل من التسارعات المماسية والناظمية والتسارع الكلي.

4- عين القيمة العددية للسرعة والتسارع عندما $t \to \infty$



نختار جملة المحاور الثابتة $ox_1y_1z_1$ بحيث ينطبق oz_1 على محور الدوران.

ونختار جملة المحاور المتماسكة $oxyz$ بحيث ينطبق oz على محور الدوران.

$\boxed{1}$

$$\vec{\omega} = \theta' = a\left(\frac{\frac{\omega_0}{a}}{1+\frac{\omega_0}{a}t}\right)\vec{k}$$ شعاع الدوران

$$= \frac{a\omega_0}{a+\omega_0 t}\vec{k}$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{-a\omega_0}{(a+\omega_0 t)^2}\vec{k}$$ شعاع التسارع الزاوي

نلاحظ أن إشارة $\vec{\varepsilon}$ سالبة ← الحركة متباطئة.

$\boxed{2}$ نختار النقطة M واقعة على المحور $\vec{ox}$ فتكون إحداثيات M في الجملة المتماسكة هي $M(R,0,0)$

لنوجد الآن شعاع سرعة النقطة M في الجملة المتماسكة (أسهل):

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \omega R \vec{j} = \frac{a\omega_0 R}{a+\omega_0 t} \vec{j}$$

واما شعاع تسارع النقطة M في الجملة المتماسكة يعطى بالشكل:

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega R & 0 \end{vmatrix}$$

$$= R\varepsilon \vec{j} - \omega^2 R \vec{i}$$

$$= \frac{-Ra\omega_0^2}{(a+\omega_0 t)^2} \vec{j} - \frac{a^2\omega_0^2 R}{(a+\omega_0 t)^2} \vec{i}$$

$\boxed{3}$ $$|\vec{\Gamma}_T(M)| = \frac{Ra\omega_0^2}{(a+\omega_0 t)^2}, \quad |\vec{\Gamma}_N(M)| = \frac{a^2\omega_0^2 R}{(a+\omega_0 t)^2}$$

$$|\vec{\Gamma}(M)| = \sqrt{\Gamma_T^2 + \Gamma_N^2}$$

$$\rightarrow |\vec{\Gamma}(M)| = \sqrt{R^2\varepsilon^2 + R^2\omega^4} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$= R\sqrt{\frac{a^2\omega_0^4}{(a+\omega_0 t)^4} + \frac{a^4\omega_0^4}{(a+\omega_0)^4}} = \frac{Ra\omega_0^2}{(a+\omega_0 t)^2}\sqrt{1+a^2}$$

$\boxed{4}$ $\vec{v}(M) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ $\Leftarrow$ $\varepsilon, \omega \longrightarrow 0$ فإن $t \longrightarrow \infty$

$$\vec{\Gamma}(M) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

اذاً الحركة متباطئة إلى أن تنعدم.