كلية العلوم قسم الرياضيات - جامعة دمشق

السنة : الثانية

المقرر : تحليل (3)

الفصل : الأول

المحاضرة : (4)

التاريخ : 2013/10/20

بداية سوف نكمل فكرة كنا قد توقفنا في المحاضرة الفائتة عندها

وهي التعريف التالي :

يقال عن التكامل المحدد :

$$\int_{a}^{+\infty} f(x).dx$$

حيث : $a \in \mathbb{R}$, (a)عدد .. أنه نوع من أنواع التكاملات المعتلة

وإذا كانت النهاية

$$I = \int_{a}^{+\infty} f(x).dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x).dx = [F(x)]_{a}^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

موجودة ومحدودة فيقال عن هذا التكامل أنه متقارب وقيمته هي قيمة هذه النهاية .

حيث : $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

وفي الحالة المعاكسة يقال عن هذا التكامل أنه متباعد ..

والآن ثمة شكلان آخران للتكامل المعتل لا بد من ذكرهما :

أولاً : لدينا التكامل المعتل من الشكل :

$$I = \int_{-\infty}^{b} f(x).dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x).dx = [F(x)]_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

حيث : $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

وكما في الحالة السابقة : يقال عن التكامل المعتل أنه متقارب إذا كانت النهاية موجودة ومحدودة وقيمته هي قيمة هذه النهاية وفي الحالة المعاكسة يقال عنه متباعد ..

ثانياً : لدينا التكامل التالي :

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx=\int_{-\infty}^{a} f(x).dx+\int_{a}^{+\infty} f(x).dx$$

حيث : $(a \in R)$ عدد

ـ يقال عن التكامل المعتل السابق :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx$$

أنه متقارب إذا وفقط إذا كان التكاملان المعتلان :

$$\int_{-\infty}^{a} f(x).dx \quad \& \quad \int_{a}^{+\infty} f(x).dx$$

متقاربان ,, وقيمته مساوية لمجموع قيمتي هذين التكاملين المعتلين .

ـ و يقال عن التكامل المعتل :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx$$

أنه متباعد إذا وفقط إذا كان واحد على الأقل من التكاملان المعتلان :

$$\int_{-\infty}^{a} f(x).dx \quad \& \quad \int_{a}^{+\infty} f(x).dx$$

تكاملاً متباعداً ..

ملاحظة :

(a) هو أي عدد من $\mathbb{R}$ ولكن يفضل أخذه مساوياً للصفر أي :

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx=\int_{-\infty}^{0} f(x).dx+\int_{0}^{+\infty} f(x).dx$$

نتيجة :

<< كل تكامل معتل هو إما متقارب أو متباعد أي وبمعنى آخر لا يوجد تكامل معتل لا يمكن تحديد ما إذا كان متقارباً أو متباعداً كما في السلاسل عندما كان يفشل المعيار في التحديد >>

أمـثـلـة :

ادرس التكاملات المعتلة التالية :

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

الحل :

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln(x)]_1^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln(1) = +\infty - 0 = +\infty$$

ومنه : قيمة التكامل موجودة لكنها غير محدودة وبالتالي نجد أن التكامل متباعد .

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$$

الحل :

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^4}\right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{4}[0-1] = \frac{1}{4}$$

ومنه : قيمة التكامل موجودة ومحدودة وبالتالي التكامل متقارب وقيمته تساوي $\frac{1}{4}$

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x.\,lnx}$$

الحل :

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x.\,lnx} = \int_{2}^{+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{lnx}\,.\,dx = [\ln|lnx|]_{2}^{+\infty} = [\ln(lnx)]_{2}^{+\infty}$$

$$= ln[(\ln(+\infty) + \ln(2)] \ = +\infty$$

ومنه : قيمة التكامل موجودة لكنها غير محدودة وبالتالي التكامل متباعد .

ملاحظة : اللوغاريتم هنا موجب لأنه يكون اللوغاريتم سالب فقط عندما يكون ضمن المجال $]0,1[$

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x.\,(lnx)^2}$$

الحل : نعتمد طريقة تغيير المتحول فنفرض أن :

$$lnx = t \ \Longrightarrow \frac{1}{x}.\,dx = dt$$

وبالتالي : $x = \infty \Longrightarrow t = ln\,\infty = \infty$, $x = 3 \ \Longrightarrow t = ln3$

$$\Longrightarrow \int_{ln3}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_{ln3}^{+\infty} = \left[-\frac{1}{t}\right]_{ln3}^{+\infty} = \left[-0 + \frac{1}{ln3}\right] = \frac{1}{ln3}$$

ومنه : قيمة التكامل موجودة ومحدودة وبالتالي التكامل متقارب وقيمته تساوي $\frac{1}{ln3}$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{9 + x^2}$$

الحل :

سوف نعتمد في الحل على القانون التالي :

$$(arc\;tg\;u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$$

إذاً الحل :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{3}.dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\left[arc\ tg\ \frac{x}{3}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{3}[arc\ tg\ \infty - arc\ tg\ 0] = \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{6}$$

ومنه : قيمة التكامل موجودة ومحدودة وبالتالي التكامل متقارب وقيمته تساوي $\frac{\pi}{6}$

تنويه :

لقد ركزنا اهتمامنا في التمارين السابقة على التكامل المعتل من الشكل :

$$\int_{\text{عدد}}^{\infty} f(x).dx$$

ليخدم ذلك المتسلسلات التي سندرسها والتي لها الشكل :

$$\sum_{n=\text{عدد}}^{\infty} a_n$$

اختبار كوشي التكاملي :

لتكن لدينا المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

بحيث يكون : $a_n \geq 0\ (\forall n)$,, ولنفرض وجود تابع مثل $f(x)$ بحيث يحقق ما يلي :

1) - $f(x)$ معرف ومستمر ومتناقص على المجال : $[1,+\infty[$
2) - $f(n) = a_n\ (\forall n)$

عندئذٍ :

1) - $\sum a_n$ تكون متقاربة $\Leftrightarrow$ $\int_1^{+\infty} f(x).dx$ متقارب .
2) - $\sum a_n$ تكون متباعدة $\Leftrightarrow$ $\int_1^{+\infty} f(x).dx$ متباعد .

ملاحظة :

لإثبات أن التابع متناقص يكفي اكتشاف أن مشتقه الأول قيمته سالبة .

تطبيق :

ادرس المتسلسلة التالية :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-1}{n.\ln(n)}$$

الحل : لناخذ المتسلسلة التالية :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.\ln(n)}$$

فنجد أن : $\frac{1}{n.\ln(n)} > 0 \ (\forall n)$

ثم لناخذ التابع : $f(x) = \frac{1}{x.\ln(x)}$ فنجد أنه مستمر على المجال $[2,+\infty[$

كما أن التابع : $f(x)$ تابع متناقص بملاحظة أن مشتقه الأول :

$f'(x) = \frac{-(ln(x)+1)}{(x.\ln(x))^2} < 0 \, , \forall x \in [2,+\infty[$ وبالتالي متناقص بالفعل .

ثم لناخذ الكامل المعتل :

$$\int_{2}^{+\infty} f(x).dx = \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x.lnx}$$

وهو تكامل متباعد .. وبالتالي :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.\ln(n)}$$

متسلسلة متباعدة حسب معيار كوشي التكاملي ..

ومنه نجد أن المتسلسلة :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-1}{n.\ln(n)}$$

متسلسلة متباعدة أيضاً .. وهو الطلوب .

ملاحظة : ((المتسلسلات الريمانية ذات الشكل : $\frac{1}{n^{\alpha}}$ يمكن استنتاج ما إذا كانت متباعدة أم متقاربة بالإعتماد على اختبار كوشي التكاملي دوماً))

متسلسلات القوى :

شكلها المختزل :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n$$

حيث : (α عدد و x مجهول)

شكلها المفصل :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 + \cdots + a_n(x-\alpha)^n + \cdots$$

يدعى α بمركز متسلسلة القوى .

أمـثـلـة :

1) -

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n . x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\,(x-0)^n$$

وهذه متسلسلة قوى مركزها العدد (0)

2) -

$$\sum_{n=2}^{\infty} 3(x+1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} 3[x-(-1)]^n$$

وهذه متسلسلة قوى مركزها العدد (1-)

3) -

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-7)^n$$

وهذه متسلسلة قوى مركزها العدد (7)

ـ أمثال متسلسلة القوى :

وتدعى القيم : $a_0, a_1, \dots \dots, a_n, \dots \dots$

بـ : أمثال متسلسلة القوى .

ـ نصف قطر المقاربة :

يعطى نصف قطر المقاربة لمتسلسلة القوى المدروسة بالقانون التالي :

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

ومنه يمكن أن يكون : $0 \le R \le +\infty$

ـ مجال التقارب :

يتطابق مع مركز المتسلسلة :

1. $R = 0$ ⟸ مجال التقارب I يتكون من نقطة واحدة فقط وهي مركز المتسلسلة المدروسة .. فإذا افترضنا أن مركز المتسلسلة هو α فإن مجال التقارب في هذه الحالة هو : $I = [\alpha, \alpha]$

2. $R = +\infty$ ⟸ مجال التقارب هو : $I =]-\infty, +\infty[$
3. $0 < R < +\infty$ ⟸ مجال التقارب هو : $I =]\alpha - R, \alpha + R[$

وتعتبر الحالة الثالثة الأكثر شيوعاً في دراستنا .

ملاحظة :

>> مجال التقارب هو مجال مفتوح وفي الحالة الأولى لم نكتبه مفتوحاً لاستثنائية هذه الحالة ولو كتبناه مفتوحاً لكانت قيمة هذه المجال هي المجموعة الخالية >>

" انتهت المحاضرة " ....