كلية العلوم قسم الرياضيات - جامعة دمشق | السنة : الثانية

المقرر : بنى جبرية (1) | الفصل : الأول

المحاضرة : (3) | التاريخ : 2013/9/29

علاقة الاحتواء :

لتكن P مجموعة غير خالية و $\sum$ جماعة من المجموعات الجزئية في P

علاقة الاحتواء المعرفة على $\sum$ هي علاقة ترتيب جزئي كونها انعكاسية و تخالفية ومتعدية

$$A \subseteq B \begin{cases} A = B \\ A \subset B \end{cases}$$

$$A \subseteq B \ , \ \ B \subseteq A \ \Longrightarrow A = B$$

$$A \subseteq B \subseteq C \ \ \Longrightarrow \ A \subseteq C$$

مثال : لتكن المجموعة $A = \{a, b, c, d\}$

$$\sum \ = \{\{a\}, \{a, b\}, \{c, b\}, \{a, b, c\}\}$$

$\{a\}$ ليس عنصر أصغر لأنّ $\{a\} \not\subset \{c, b\}$, بينما $\{a\}$ عنصر أصغري .

$\{a, b, c\}$ عنصر أكبر وأعظمي

مثال (وظيفة) : أثبت أنه في المجموعة المرتبة جزئياً

1- كل عنصر أصغر (أكبر) يكون أصغري (أعظمي)

2- العنصر الأصغري (الأعظمي) في حال وجوده يكون وحيد .

مبرهنة : لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً , الشروط الآتية متكافئة :

1- كل مجموعة جزئية وغير خالية في P تحوي عنصر أصغري (الشرط الأصغري) .

2- مبدأ الاستقراء : لتكن θ قضية ما وجميع العناصر الأصغرية في P تحقق القضية θ .
ليكن $a \in P$ إذا كانت جميع العناصر $x \in P$ التي من أجلها $x < a$ والتي تحقق القضية θ يؤدي إلى العنصر a يحقق القضية θ عندئذٍ : فإنّ جميع عناصر المجموعة P تحقق القضية θ .

3- شرط انقطاع السلاسل المتناقصة : كل سلسلة متناقصة من عناصر المجموعة P من الشكل :

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

تنقطع أي يوجد دليل k من أجله : $\forall\, t \geq k \;;\; a_k = a_t$

الإثبات : $(2 \Leftarrow 1)$:

لنفرض أنّ مجموعة العناصر التي لا تحقق القضية θ هي M إذا كانت

1 - $M = \emptyset$ يتم المطلوب .

2 - $M \neq \emptyset$ عندئذٍ يوجد في M عنصر أصغري وليكن a , العنصر a لا يحقق الخاصة θ وإنّ a ليس عنصر أصغري في المجموعة P ومنه أياً كان $x \in P$ بحيث $x < a$ إنّ $x \notin M$ أي إنّ x تحقق الخاصة θ

وحسب الفرض فإنّ العنصر a يحقق القضية θ ومنه لا يمكن أن تكون $M \neq \emptyset$

$(3 \Leftarrow 2)$:

لنعرف على المجموعة P قضية θ_0 معرفة بالشكل التالي :
سوف نقول عن العنصر $b \in P$ إنه يحقق الخاصة θ_0 إذا كانت أي سلسلة متناقصة من عناصر P تبدأ بالعنصر b تنقطع فنلاحظ أنّ العناصر الأصغرية في P تحقق القضية θ_0

ليكن $b \in P$ ولنفرض أنّ جميع العناصر $x \in P$ التي من أجلها $x < b$ تحقق القضية θ_0

لنأخذ السلسلة المتناقصة من عناصر P

$$b = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \quad (\star)$$

نميز حالتين :

1 - المساواة محققة في جميع حدود السلسلة وفي هذه الحالة السلسلة $(\star)$ تنقطع

2 - لنفرض أنّ أول حد لا تتحقق عنده المساواة هو a_s ولنأخذ السلسلة

$$a_s \geq a_{s+1} \geq a_{s+2} \geq \cdots$$

بما أنّ $b > a_s$ فحسب الفرض فإنّ العنصر a_s يحقق القضية θ_0 ومنه فإنّ السلسلة $a_s \geq a_{s+1}$ تنقطع

وبالتالي فإنّ السلسلة $(\star)$ تنقطع , حسب الفرض فإنّ جميع عناصر المجموعة P تحقق القضية θ_0

(3 $\Leftarrow$ 1): لتكن A مجموعة جزئية في P وغير خالية , لنفرض جدلاً أنّ A لا تحوي عنصر أصغري

عندئذٍ يوجد $a_1 \in A$ ليس أصغري ويوجد $a_2 \in P$ بحيث $a_2 < a_1$ والعنصر a_2 ليس أصغري و يوجد a_3 ليس أصغري بحيث ... $a_1 > a_2 > a_3$ وهذا يناقض الفرض ومما سبق نجد أنّ A تحوي عنصر أصغري.

مبرهنة : كل مجموعة جزئية وغير خالية في $\mathbb{N}$ تحوي عنصر أصغر.

الإثبات : لتكن B مجموعة جزئية وغير خالية في $\mathbb{N}$

إذا كان $0 \in B$ أو $B = \mathbb{N}$ فإنّ B تحوي عنصر أصغر هو الصفر ويتم المطلوب .

لنفرض أنّ $0 \notin B$ و أنّ $B \neq \mathbb{N}$, لنأخذ المجموعة :

$$S = \{x : x \in \mathbb{N}\ ;\ x \leq b ; \forall b \in B\}$$

المجموعة $S \neq \emptyset$ لأنّ $0 \in S$, لنفرض أنّ $S = \mathbb{N}$ ومنه يكون $B \subseteq S$ وليكن $b \in B$ عندئذٍ: $b + 1 \in S$ وحسب التعريف فإنّ $b + 1 \leq b$ وهذا غير ممكن ومنه $S \neq \mathbb{N}$ عندئذٍ : يوجد $k \in S$ وَ $k + 1 \notin S$

لنبرهن أنّ $k \in B$: نفرض جدلاً أنّ $k \notin B$ بما أنّ $k \in S$ فإنّ $k < b \ ; \ \forall\, b \in B$

نفرض $b_0 \in B$ عندئذٍ $k < b_0$ وبالتالي $b_0 = m + k$

$$b_0 = (m - 1) + (k + 1) \Longrightarrow b_0 \geq k + 1$$

ومنه $\forall\, b \in B\ ;\ k + 1 < b$ ومنه $k + 1 \in S$ وهذا غير ممكن

ومنه الفرض الجدلي خاطئ ويكون $k \in B$ ويحقق $\forall\, b \in B\ ; k \leq b$

وهذا يبين أنّ العنصر k هو عنصر أصغر في B

نتيجة : بالاعتماد على المبرهنة السابقة ومع الأخذ بعين الاعتبار أنّ كل عنصر أصغر هو عنصر أصغري في المجموعة المرتبة جزئياً , نستطيع صياغة النتيجة التالية :

كل مجموعة جزئية وغير خالية في مجموعة الأعداد الطبيعية تحوي عنصر أصغري (الشرط الأصغري) .

تعريف :

لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً و $a,b\in P$ نقول عن العنصرين a,b أنهما متقارنان إذا حققا :

إما $a\leq b$ أو $b\leq a$

تعريف :

نقول عن المجموعة المرتبة جزئياً إنها مرتبة كلياً إذا كان كل عنصرين فيها متقارنين
ومن ألأمثلة على ذلك مجموعة الأعداد الطبيعية $0<1<2<\cdots$

تعريف :

لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً و A مجموعة غير خالية وجزئية في P
نقول عن العنصر $a\in P$ أنه حد أعلى للمجموعة A إذا حقق الشرط :

$$\forall\, x\in A\ ;\ x\leq a$$

ونقول عن العنصر $b\in P$ أنه حد أدنى للمجموعة A إذا حقق الشرط :

$$\forall\, x\in A\ ;\ x\geq b$$

وظيفة :

قارن بين الحد الأدنى والحد الأعلى والعنصرين الأصغر والأكبر في المجموعة المرتبة جزئياً .

تمهيدية زورن :

لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً

إذا كانت كل مجموعة جزئية في P غير خالية ومرتبة كلياً تملك حد أدنى (أعلى) عندئذٍ :

يوجد في المجموعة P عنصر أصغري (أعظمي) واحد على الأقل .

... انتهت المحاضرة...