* المحاضرة الأولى :- ٢٠١٣/٩/٢٠ م

** الفصل الثاني : جبور لي **

* تعريف :-

إن جبر لي : هو مقاس A على حلقة واحدية تبادلية R مزودة بقانون تشكيل داخلي ، يرمز له بالرمز [,] ويحقق الموضوعات الخمس التالية :-

-1) $[x,x]=0$

-2) $[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$

-3) $[x,y+z]=[x,y]+[x,z]$

-4) $[\lambda x,y]=[x,\lambda y]=\lambda[x,y] \quad ; \quad \forall \lambda\in R$

-5) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0 \quad , \quad \forall x,y,z\in A$

وتعرف العلاقة الأخيرة بمتطابقة جاكوبي .

* ملاحظة :-

نرغب في تبيان أن مفهوم جبور لي يعود إلى العالم النرويجي ماريوس سوفوس لي (١٨٤٢ - ١٨٩٩) .

* ملاحظة :-

جبر لي هو مقاس مزود بالتطبيق الخطي (2 و 3 و 4) ويحقق (1) ومتطابقة جاكوبي .

* تعريف :-

نقول عن جبر لي A أنه تبادلي إذا اتصف بالخاصية :-

$[A,A]=0$

أي أنه إذا كان $[x,y]=0$ وذلك مهما يكن $x,y\in A$.

* تعريف :-

ليكن A, A' جبري لي على الحلقة الواحدية التبديلية R . نقول عن التطبيق f لـ A في A' إنه تشاكل بين الجبرين إذا كان f تطبيقاً خطياً وكان :

$$f[x,y]=[f(x),f(y)]_{A'}$$

مهما كان العنصران x, y من A.

- بتعبير آخر، يكون التطبيق $f: A \longrightarrow A'$ تشاكلاً لـ A في A' ونعبر عن ذلك بالرمز $f \in L_A\text{-}Hom(A, A')$ إذا تحقق:

1- $f(x+y) = f(x) + f(y)$

2- $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

3- $f[x, y] = [f(x), f(y)]$

** جبور لي الخاصة:

جبر لي $M_n(\mathbb{C})$ لمجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة n، حيث $\mathbb{C}$ مجموعة (حلقة) الأعداد العقدية.

- إن $M_n(\mathbb{C})$ تشكل مقاساً على الحلقة $\mathbb{C}$ بالنسبة لعملية جمع المصفوفات والضارب السلمي لمصفوفة.

$$+ : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$ قانون تشكيل داخلي.

$$(M, M') \longmapsto M + M'$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$ قانون تشكيل خارجي.

$$(\lambda, M) \longmapsto \lambda M$$

- لنزود $M_n(\mathbb{C})$ بقانون تشكيل داخلي $[\,,\,]$ معرف بالشكل:

$$[\,,\,] : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$

$$[M_1, M_2] = M_1 \cdot M_2 - M_2 \cdot M_1$$

نلاحظ أن:

1) $[M, M] = 0$

2) $[M_1 + M_2, M_3] = (M_1 + M_2) \cdot M_3 - M_3 \cdot (M_1 + M_2)$

$$= M_1 \cdot M_3 + M_2 M_3 - M_3 M_1 - M_3 M_2$$

$$= [M_1, M_3] + [M_2, M_3]$$

وبصورة مماثلة نبرهن أن:

3) $[M_1, M_2 + M_3] = [M_1, M_2] + [M_1, M_3]$

4) $[\lambda M_1, M_2] = (\lambda M_1).M_2 - M_2(\lambda M_1)$

$= \lambda(M_1.M_2 - M_2.M_1) = \lambda[M_1, M_2]$

وذلك: $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

وبصورة مماثلة نجد أن:

$$[M_1, \lambda M_2] = \lambda[M_1, M_2]$$

فيكون:

$$[\lambda M_1, M_2] = [M_1, \lambda M_2] = \lambda[M_1, M_2]. \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

- لنبرهن متطابقة جاكوبي:-

5) $[M_1, [M_2, M_3]] + [M_2, [M_3, M_1]] + [M_3, [M_1, M_2]] = 0$

لنأخذ:

* $[M_1, [M_2, M_3]] = M_1.[M_2, M_3] - [M_2, M_3].M_1$

$= M_1.(M_2.M_3 - M_3.M_2) - (M_2.M_3 - M_3.M_2).M_1$

$= M_1M_2M_3 - M_1M_3M_2 - M_2.M_3.M_1 + M_3.M_2.M_1 \quad \ldots \mathrm{I}$

* $[M_2, [M_3, M_1]] = M_2.[M_3, M_1] - [M_3, M_1].M_2$

$= M_2(M_3.M_1 - M_1M_3) - (M_3M_1 - M_1M_3).M_2$

$= M_2.M_3.M_1 - M_2.M_1.M_3 - M_3M_1M_2 + M_1M_3M_2 \quad \ldots \mathrm{II}$

* $[M_3, [M_1, M_2]] = M_3.(M_1M_2 - M_2M_1) - (M_1M_2 - M_2M_1).M_3$

$= M_3.M_1.M_2 - M_3.M_2M_1 - M_1.M_2.M_3 + M_2M_1.M_3 \quad \ldots \mathrm{III}$

بجمع I & II & III نجد:

$$[M_1, [M_2, M_3]] + [M_2, [M_3, M_1]] + [M_3, [M_1, M_2]] = 0$$

أي متطابقة جاكوبي محققة.

** تطبيقات الاشتقاق على جبر لي :-

* تعريف:
ليكن A جبر لي على حلقة واحدية تبادلية R، إن الاشتقاق على A
1- هو تداكل d على المقاس A. 2- ويحقق العلاقة :-

$$d[x,y]=[dx,y]+[x,dy] \quad ; \forall x,y\in A$$

سنرمز بـ $Der(A)$ لمجموعة تطبيقات الاشتقاق على A.
- سنزود المجموعة $Der(A)$ بالعمليتين التاليتين:

- $(d+d_1)(x)=d(x)+d_1(x)$
- $(\lambda d)(x)=\lambda d(x) \quad ; \forall \lambda\in R , \forall x\in A$

وحيث $d,d_1\in Der(A)$.
لنبرهن الآن أن: $d+d_1$ ، λd تطبيقي اشتقاق على A.
نلاحظ أن: $d+d_1$ هو تداكل على A ، و λd تداكل على A.
لأن مجموع تداكلين تداكل والجداء السلمي لعنصر من الحلقة بتداكل هو تداكل.
كما أن :-

$$(d+d_1)[x,y] = d[x,y]+d_1[x,y]$$
$$= [dx,y]+[x,dy]+[d_1x,y]+[x,d_1y]$$

$$= [dx+d_1x,y]+[x,dy+d_1y]$$ حسب الخاصة الخطانية.

$$=[(d+d_1)(x),y]+[x,(d+d_1)(y)]$$

وأيضاً:

$$(\lambda d)[x,y]=\lambda(d[x,y])$$
$$=\lambda([dx,y]+[x,dy])$$
$$=[\lambda(dx),y]+[x,\lambda(dy)]$$

$$= [(\lambda d)x, y] + [x, (\lambda d)y]$$

ومنه نجد أن $d+d_1$ ، λd تطبيق اشتقاق. أي:

$$d+d_1 \in Der(A) \quad \& \quad \lambda d \in Der(A)$$

- وبالتالي أصبح لدينا قانوني تشكيل:

الأول داخلي:

$$+ : Der(A) \times Der(A) \longrightarrow Der(A)$$
$$(d, d_1) \longmapsto d+d_1$$

الثاني خارجي مجموعة مؤثراته R:

$$\cdot : R \times Der(A) \longrightarrow Der(A)$$
$$(\lambda, d) \longmapsto \lambda d$$

- ونستطيع أن نبرهن أن: $Der(A)$ تشكل مقاساً (مودولاً) على R.

(يترك وظيفة للطالب) أو تأخذ من الكتاب صفحة ٧٢ نظرية (٢-٢٧)

* * *

انتهت المحاضرة الأولى!