* المحاضرة: الرابعة، ١٩/١٠/٢٠١٢.

* نظرية:

إذا كان f تشاكلاً لجبرلي A في جبرلي A' فإنّ $\ker f$ مثالي في A.

- البرهان: نعلم أنّ: $\ker f$ مقاس جزئي من A.

لنبرهن الآن أنّ: $[\ker f, A] \subseteq \ker f$: (حسب الملاحظة السابقة)

$$\forall x \in \ker f \; , \forall y \in A :$$

$$f[x,y] = [f(x), f(y)] \quad \text{(}f\text{ تشاكل بين جبري لي)}$$

$$= [0, f(y)] = 0$$

أي أنّ: $[x,y] \in \ker f$ وبالتالي: $[\ker f, A] \subseteq \ker f$

ومنه: $\ker f$ مثالي في A.

* نظرية:

إذا كان f تشاكلاً لجبرلي A في جبرلي A'، فإنّ: $\operatorname{Im} f$ جبر جزئي من A'.

- البرهان: من الواضح أنّ: $\operatorname{Im} f \neq \emptyset$، لنبرهن أنّ: $\operatorname{Im} f$ مقاس جزئي من A'.

$$\forall x', y' \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists x \in A : f(x) = x'$$

$$\wedge \; \exists y \in A : f(y) = y'$$

وليكن: $\alpha, \beta \in R$ عندئذ:

$$\alpha x' + \beta y' = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

$$= f(\alpha x + \beta y) \quad \text{(}f\text{ تشاكل بين جبري لي)}$$

ومنه: $\operatorname{Im} f \ni \alpha x' + \beta y'$ حيث: $\alpha x + \beta y \in A$.

إذاً: $\operatorname{Im} f$ مقاس جزئي من A'.

- لنبرهن أنّ: $[\mathrm{Im} f, \mathrm{Im} f] \subseteq \mathrm{Im} f$

لدينا:

$$[x', y'] = [f(x), f(y)] \quad (\text{ا تشاكل بين جبري لي})$$

$$= f\underbrace{[x, y]}_{\in A} \in \mathrm{Im} f$$

ومنه:

$$[\mathrm{Im} f, \mathrm{Im} f] \subseteq \mathrm{Im} f$$

أي: $\mathrm{Im} f$ جبر جزئي من A'. *

** جبر لي الخارج :-

ليكن A جبر لي وليكن I مثالياً في A. لنعرّف على A العلاقة الثنائية $(\equiv)$ بالشكل:

$$x \equiv y \bmod I \iff x - y \in I \; ; \; \forall x, y \in A$$

ونقرأ: x يطابق y قياس I.

نلاحظ أنها علاقة تكافؤ لأنها:

1- انعكاسية: $x \equiv x \bmod I \iff x - x \in I$

2- تناظرية: $x \equiv y \bmod I \Rightarrow x - y \in I \iff -(x - y) \in I$

$$\iff y - x \in I \iff y \equiv x \bmod I$$

3- متعدية:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv y \\ y &\equiv z \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\iff x - y \in I \\ &\iff y - z \in I \end{aligned}$$

$$x - z = x - y + y - z \in I \iff x \equiv z \bmod I$$

أيضاً إنّ العلاقة السابقة متوائمة مع البنية A (أي منسجمة) أو يمكن القول إنها معرفة جيداً لأنه:

ليكن $x \equiv x' \bmod I \iff x - x' \in I$

وليكن $y \equiv y' \bmod I \iff y - y' \in I$

وبما أنّ I مثالي فإنّ:

$$[\underset{I}{x'}, \underset{I}{y-y'}] \in I \quad \text{و} \quad [\underset{I}{y}, \underset{I}{x-x'}] \in I$$

وبالتالي: $[x', y-y'] - [y, x-x'] \in I$

ومنه: $[\cancel{x', y}] - [x', y'] - [y, x] + [\cancel{y, x'}]$

$$\Rightarrow [x, y] - [x', y'] \in I \Rightarrow [x, y] \equiv [x', y'] \bmod I$$

وأيضاً لنبرهن أنّ ($\equiv$) متوافقة مع قانون التشكيل الداخلي ($+$):-

ليكن $x \equiv x' \bmod I \Leftrightarrow x - x' \in I$

وليكن $y \equiv y' \bmod I \Leftrightarrow y - y' \in I$

وبالتالي يكون: $(x - x') + (y - y') \in I$

أي: $(x + y) - (x' + y') \in I$

ومنه: $x + y \equiv x' + y' \bmod I$

- لنبرهن الآن أنّ ($\equiv$) متوافقة مع قانون التشكيل الخارجي ($\cdot$):-

ليكن $x \equiv y \bmod I$ (نبرهن $\lambda x \equiv \lambda y$)

$$\Leftrightarrow x - y \in I \Leftrightarrow \lambda(x - y) \in I \Leftrightarrow \lambda x - \lambda y \in I$$

$$\Leftrightarrow \lambda x \equiv \lambda y \bmod I$$

ومنه أصبح لدينا A جبر لي مزود بعلاقة تكافؤ معرفة جيداً وبالتالي نحصل على المجموعة: $A/_I = \{x + I,\ x \in A\}$

التي نعرف عليها قانوني التشكيل:-

١- قانون التشكيل الداخلي:

$$+ : A/_I \times A/_I \longrightarrow A/_I$$

$$(x + I, y + I) \longmapsto (x + y) + I$$

٢ قانون التشكيل الخارجي :-

$$\cdot : R \times A/_I \longrightarrow A/_I$$

$$(\lambda , x+I) \longmapsto \lambda x + I$$

أي يكون،

$$(x+I)+(y+I)=(x+y)+I \quad \ldots (*)$$

$$\lambda.(x+I) = \lambda x + I \quad \ldots (**)$$

ويمكن للطالب أن يبيّن أنّ $A/_I$ مقاس على R والذي يُدعى مقاس الخارج.

* نظرية :- إنّ $A/_I$ جبرلي.

- البرهان : إنّ $A/_I$ تشكّل مقاساً على R. لنزوده هذا المقاس بقانون التشكيل الداخلي التالي :-

$$[x+I , y+I] = [x,y]+I ; \forall x+I , y+I \in A/_I \quad \ldots (***)$$

الذي يحقق الشروط الخمسة :

1) $[x+I , x+I] = [x,x] + I = I$

2) $[(x+I)+(y+I), z+I] = [(x+y)+I , z+I]$ حسب $(*)$

$= [x+y , z]+I$ حسب $(***)$

$= ([x,z]+[y,z])+I$

$= ([x,z]+I)+([y,z]+I)$

$= [x+I , z+I]+[y+I , z+I]$ حسب $(***)$

وبأسلوب مماثل يمكن أن نبرهن ،

3) $[x+I , (y+I)+(z+I)] = [x+I , y+I]+[x+I , z+I]$

4) $[\lambda(x+I) , y+I] = [\lambda x+I , y+I] = [\lambda x , y] + I$

$$= \lambda [x, y] + I$$

$$= \lambda ([x, y] + I) \quad \text{حسب } (**)$$

$$= \lambda ([x+I, y+I]) \quad \text{حسب } (***)$$

وبأسلوب مماثل نبرهن،

$$[x+I, \lambda(y+I)] = \lambda [x+I, y+I]$$

5) متطابقة جاكوبي: لنبرهن أنّ:

$$[x+I, [y+I, z+I]] + [y+I, [z+I, x+I]] + [z+I, [x+I, y+I]] = \underline{I}$$

لدينا:

$$\bullet [x+I, [y+I, z+I]] = [x+I, [y, z] + I] \quad \text{حسب } (***)$$

$$= [x, [y, z]] + I \quad \text{حسب } (***)$$

$$\bullet [y+I, [z+I, x+I]] = [y+I, [z, x] + I]$$

$$= [y, [z, x]] + I$$

$$\bullet [z+I, [x+I, y+I]] = [z+I, [x, y] + I]$$

$$= [z, [x, y]] + I$$

وبجمع الحدود الثلاثة نحصل على صحة متطابقة جاكوبي لكون A جبر لي .

*ملاحظة: $I + I = I$

وبالتالي A/I جبر لي ، وبذلك يتم المطلوب.

* ملاحظة: إنّ A/I جبر لي يسمّى جبر الخارج .

*ملاحظة:

من معنا المبرهنة (ليكن A جبر لي عندئذٍ : $Inn(A)$ يكون مثالي في جبر لي $(Der(A))$. وبالتالي نحصل على جبر لي الخارج : $Der(A/Inn A)$ والذي ندعوه أحياناً الاشتقاقات الخارجية على جبر لي A .

* * *

انتهت المحاضرة الرابعة