كلية العلوم قسم الرياضيات - جامعة دمشق

السنة : الثانية

المقرر : بنى جبرية (1)

الفصل : الأول

المحاضرة : (4)

التاريخ : 2013/9/30

$$0 < 1 < 2 < \cdots . < -1 < -2 < \cdots$$

مجموعة الأعداد الصحيحة المرتبة بهذا الشكل تحوي عنصر أصغر (أصغري)

قدرة مجموعة

تعريف : قدرة المجموعة المنتهية هو عدد طبيعي يدل على عدد عناصر المجموعة .

قدرة المجموعة الغير منتهية : هو رمز يدل على كمية العناصر في هذه المجموعة

نرمز لقدرة المجموعة A بالشكل $card\ A$, رئيس (عدد عناصر) المجموعة A

تعريف : لتكن A, B مجموعات , نقول أنّ :

$$card\ A = card\ B \Leftrightarrow \exists\, f: A \longrightarrow B \ \vee \ B \longrightarrow A$$ تقابل

ونرمز للمجموعات A, B المتساويات القدرة بالشكل $A \sim B$

وظيفة : لتكن $\sum$ مجموعة من القدرات أثبت أنّ العلاقة ($\sim$) لبمعرفة على القدرات هي على تكافؤ على $\sum$ وعين صفوف تكافؤ هذه العلاقة ..

تعريف : ليكن A, B مجموعتين نقول أنّ :

$$card\ A \leq card\ B \Leftrightarrow \exists\, f: A \longrightarrow B$$ متباين

وظيفة :
لتكن $\sum$ مجموعة من القدرات أثبت أنّ العلاقة ($\leq$) المعرفة على القدرات هي علاقة ترتيب جزئي على $\sum$

مبرهنة (كانتور - برنشتاين) :

لتكن A, B مجموعات إذا وجد تطبيق متباين : $f: A \longrightarrow B$ و تطبيق متباين آخر $g: B \longrightarrow A$
عندئذٍ يكون : $card\ A = card\ B$

ترتيب القدرات للمجموعات النتهية , ترتب في سلسلة من الشكل :

$$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots < \mathbb{N}$$

تعريف : نرمز لقدرة مجموعة الأعداد الطبيعية بالشكل $\aleph_0$ وتقرأ ألف صفر .

وقدر ة مجموعة الأعداد الحقيقية نرمز لها بالشكل $\aleph$ وتقرأ ألف .

مبرهنة : لتكن Pمجموعة ما و $P(P)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من P عندئذٍ :

$$card\ P < card\ P(P)$$

البرهان :

1 - إذا كانت $P = \emptyset$ عندئذٍ : $card\ P = 0 < 1 = card\ P(P)$

2 - $P \neq \emptyset$, لنعرف العلاقة $\quad f: P \longrightarrow P(P)$

$$\forall\ a \in P\ \ f(a) = \{a\} \in P(P)$$

العلاقة f تطبيق متباين "يجب إثبات ذلك" وحسب التعريف

$$card\ P \leq card\ P(P)$$

لنفرض جدلاً أنّ $card\ P = card\ P(P)$ وحسب التعريف يوجد تقابل : $\quad g: P \longrightarrow P(P)$

لنأخذ المجموعة : $\quad H = \{a: a \in P\ \ ,\ \ a \notin g(a)\}$

إنّ المجموعة H جزئية في P وغير خالية لأنه إذا كانت $H = \emptyset$ عندئذٍ :

يوجد $b \in P$ بحيث $g(b) = H$ ومنه حسب تعريف H فإنّ $b \in g(b) = H = \emptyset$ (لأن g غامر)

وهذا غير ممكن إذاً إنّ $H \neq \emptyset$.

بما أنّ $H \in P(P)$ عندئذٍ يوجد $d \in P$ بحيث $g(d) = H$ ونميز حالتين :

1 - $d \in H$ عندئذٍ $d \notin g(d) = H$ وهذا غير ممكن

2 - $d \notin H$ عندئذٍ $d \in g(d) = H$ وهذا غير ممكن

ومما سبق نجد أنّ الفرض $card\ P = card\ P(P)$ غير ممكن ومنه $card\ P < card\ P(P)$.

ملاحظة : مجموعة القدرات للمجموعات هي مجموعة مرتبة كلياً بالنسبة لعلاقة $(\leq)$ المعرفة على القدرات

مثال : أثبت أنّ $\quad card\ \mathbb{Z} = card\ \mathbb{N}^*$

لنعرف العلاقة : $\quad f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ بالشكل التالي :

$$f(n) = \begin{cases} 2n+1 & : \ n \geq 0 \\ 2|n| & : \ n < 0 \end{cases}$$

إنّ f تطبيق : $\quad \forall\ m, n \in \mathbb{Z}:\ \ n = m \Longrightarrow f(n) = f(m)$

لنفرض أنّ $n = m$ عندئذٍ :إما $n, m \geq 0$ وفي هذه الحالة

$$2n + 1 = 2m + 1 \Longrightarrow f(n) = f(m)$$

أما إذا كان $n, m < 0$ عندئذٍ :

$$n = m \Longrightarrow |n| = |m| \Longrightarrow 2|n| = 2|m| \Longrightarrow f(n) = f(m)$$

إنّ f متباين لأنه إذا كان $n, m \in \mathbb{Z}$ بحيث $f(n) = f(m)$ إنّ $n = m$

نفرض أنّ $f(n) = f(m)$, إذا كان $n, m \geq 0$:

$$f(n) = f(m) \Longrightarrow 2n + 1 = 2m + 1 \Longrightarrow 2n = 2m \Longrightarrow n = m$$

إذا كان $n, m < 0$ عندئذٍ :

$$2|n| = 2|m| \Longrightarrow -n = -m \Longrightarrow n = m$$

إذا كان $n \geq 0 , m < 0$ عندئذٍ :

$$f(n) = f(m) \Longrightarrow 2n + 1 = -2m \Longrightarrow 2(n + m) = -1 \Longrightarrow n + m = -\frac{1}{2} \overset{??}{\in} \mathbb{Z}$$

و هذا غير ممكن ومنه الحالة الأخيرة لا يمكن أن تكون موجودة , ومما سبق يكون f متباين .

إنّ التطبيق f غامر لأنه إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ نميز حالتين :

إذا كان n زوجي عندئذٍ $-n \in \mathbb{Z}$:

$$-\frac{n}{2} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f\left(\frac{-n}{2}\right) = 2\left|\frac{-n}{2}\right| = \frac{2n}{2} = n$$

إذا كان n فردي عندئذٍ $(n-1)$ زوجي ومنه $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}$:

$$f\left(\frac{n-1}{2}\right) = 2\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 = n - 1 + 1 = n$$

ومما سبق نجد أنّ التطبيق f غامر وبالتالي تقابل ومنه يكون $card\ \mathbb{Z} = card\ \mathbb{N}^*$

تعريف : نقول عن المجموعة A إنها قابلة للعد إذا كانت $card\ A = card\ \mathbb{N}$

وظيفة : أثبت أنّ $card\ \mathbb{N} = card\ \mathbb{Q}$

مبرهنة : كل مجموعة جزئية وغير منتهية في المجموعة $\mathbb{N}^*$ تكون قابلة للعد .

الإثبات :

لتكن $A \subset \mathbb{N}$ وغير منتهية

(نعلم أنّ كل مجموعة جزئية في $\mathbb{N}$ تحوي عنصر أصغر)

لنفرض أنّ a_1 هو العنصر الأصغر في المجموعة A

ولنفرض أنّ a_2 العنصر الأصغري في المجموعة $A\backslash\{a_1\}$

ولنفرض أنّ a_3 العنصر الأصغر في المجموعة $A\{a_1, a_2\}$

لنعرف التطبيق f :

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow A$$

بالشكل التالي : $f(n) = a_n$

a_n هو العنصر الأصغر في المجموعة $A\backslash\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$

إنّ التطبيق f متباين وغامر وبالتالي يكون تقابل ومنه :

$$card\ \mathbb{N} = card\ A$$

وبالتالي إنّ المجموعة A قابلة للعد .

نتيجة : مجموعة الأعداد الطبيعية أصغر مجموعة غير منتهية قابلة للعد .

... انتهت المحاضرة...