3/10/2013

المحاضرة الثانية

معادلات حركة مجموعة مادية:

إن معادلات حركة مجموعة مادية هي العلاقات الزمنية التي تربط الإحداثيات المعممة لهذه المجموعة مع الزمن ويكون عدد معادلات الحركة للمجموعة المادية مساوياً إلى عدد درجات حرية هذه المجموعة

$$q_i = q_i(t) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

وللجسو الصلب الطليق يوجد ٦ درجات للحرية وبالتالي يوجد ٦ معادلات للحركة

أما الجسو الصلب المقيد فعدد درجات حريته أصغر تماماً من (٦) وبالتالي عدد معادلات الحركة أصغر من (٦)

ملاحظة: يجب وضع كل العلاقات لإيجاد إشارة الإسقاط وتجنب الوقوع بالخطأ

مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي لكي تتحرك مجموعة مادية كمجموعة متماسكة (كجسو صلب) إذا تساوت مسقطي سرعتي نقطتين من هذا الجسو على المستقيم الواصل بينهما

$$\forall A, B \in S: \quad \text{Proj}_{AB} \vec{v}(A) = \text{Proj}_{AB} \vec{v}(B) \iff (S) \text{ يتحرك جسو صلب}$$

الإثبات:

بفرض S جسو صلب ←

$$\forall A, B \in S \iff |\vec{AB}| = C \iff (\vec{AB})^2 = C^2$$

بالاشتقاق نجد:

$$\iff 2(\vec{AB})\, d\frac{\vec{AB}}{dt} = 0$$

$$\forall O \in \text{الفراغ} \Rightarrow 2(\vec{AB})\, \frac{d(\vec{OB} - \vec{OA})}{dt} = 0 \iff \vec{AB}\left[\frac{d\vec{OB}}{dt} - \frac{d\vec{OA}}{dt}\right] = 0$$

$$\iff \vec{AB}(\vec{v}(B) - \vec{v}(A)) = 0$$

$$\iff \vec{AB}\,\vec{v}(B) = \vec{AB}\,\vec{v}(A)$$

$$\iff |\vec{AB}| \cdot |\vec{v}(B)| \cos\theta_1 = |\vec{AB}| \cdot |\vec{v}(A)| \cos\theta_2$$

$$\leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{v}(B)| \cdot \frac{\text{Proj}_{AB}\vec{v}(B)}{|\vec{v}(B)|} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{v}(A)| : \frac{\text{Proj}_{AB}\vec{v}(A)}{|\vec{v}(A)|}$$

$$\leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| \cdot \text{Proj}_{AB}\vec{v}(B) = |\overrightarrow{AB}| \ \text{proj}_{AB}\vec{v}(A)$$

$$\leftrightarrow \text{Proj}_{AB}\vec{v}(B) = \text{Proj}_{AB}\vec{v}(A)$$

تطبيق بالاعتماد على النظرية الأساسية :

عين شرعة نقطة M من الجسو وذلك بمعرفة سرع ثلاثة نقاط من الجسو غير واقعة على استقامة واحدة.

لتكن $M \in S$ و لتكن $\vec{v}(M) = (a,b,c)$

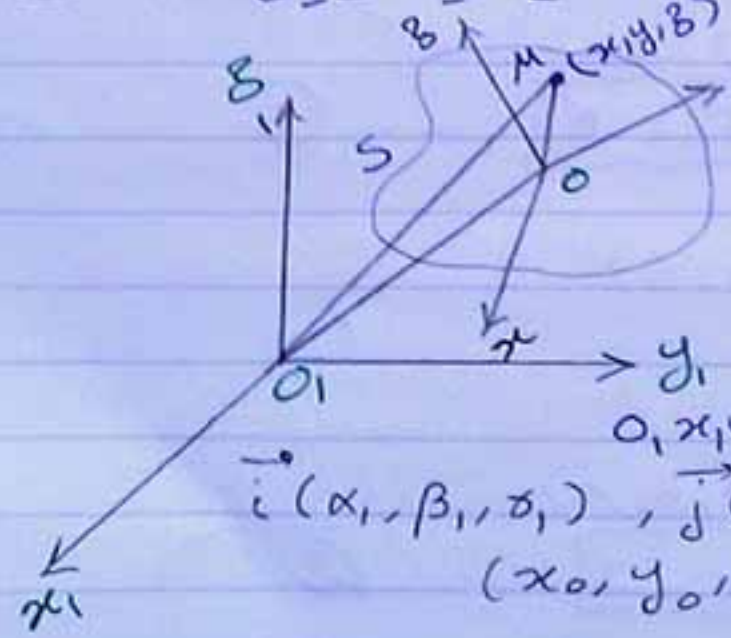
$\forall A,B,C \in S$

$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}(A) \leftarrow \text{Proj}_{AM}\vec{v}(M) = \text{Proj}_{AM}\vec{v}(A)$

$\overrightarrow{BM}\,\vec{v}(M) = \overrightarrow{BM}\,\vec{v}(B) \leftarrow \text{proj}_{BM}\vec{v}(M) = \text{proj}_{BM}\vec{v}(B)$

$\overrightarrow{CM}\,\vec{v}(M) = \overrightarrow{CM}\,\vec{v}(C) \leftarrow \text{proj}_{CM}\vec{v}(M) = \text{proj}_{CM}\vec{v}(C)$

حيث النقطة M لا تقع على استقامة واحدة مع أي نقطتين من النقط الثلاثة



- تعيين موضع الجسو الصلب تحليليا :

$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{O_1M} = (x_0,y_0,z_0) + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$O_1x_1y_1z_1$ ل متغيرة بالنسبة $\leftarrow \vec{i},\vec{j},\vec{k}$

$\vec{i}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ ، $\vec{j}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ ، $\vec{k}(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$

(x_0,y_0,z_0) + وسطاء g

12 وسيط

مرتبطين بـ 6 علاقات للارتباط:

$\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ ، $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$ ، $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$

$i^2=1$ $j^2=1$ $k^2=1$

$$\overrightarrow{O_1M}=(x_0,y_0,z_0)+x(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)+y(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)+z(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$$

$$x_1=x_0+x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3$$
$$y_1=y_0+x\beta_1+y\beta_2+z\beta_3$$
$$z_1=z_0+x\gamma_1+y\gamma_2+z\gamma_3$$

تطبيق: نعرف A,B,C ثلاث نقاط من جسم صلب راحداثياتها في لحظة ما t

$C(0,3,-1)$، $B(1,1,0)$، $A(0,0,0)$

$\vec{v}(A)=(2,1,-3)$ ، $\vec{v}(B)=(0,3,-1)$ ، $\vec{v}(C)=(1,2,-5)$

والمطلوب عين سرعة النقطة $M(1,1,-1)$

الحل:

حسب النظرية الأساسية:

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{v}(A)=\overrightarrow{AM}\cdot\vec{v}(M)$$
$$\overrightarrow{BM}\cdot\vec{v}(B)=\overrightarrow{BM}\cdot\vec{v}(M)$$
$$\overrightarrow{CM}\cdot\vec{v}(C)=\overrightarrow{CM}\cdot\vec{v}(M)$$

نعرف $\vec{v}(M)=(a,b,c)$

$(1,1,-1)\cdot(2,1,-3)=(1,1,-1)\cdot(a,b,c)$

$2+1+3=a+b-c \rightarrow \boxed{a+b-c=6}$ ..... (1)

$(0,0,-1)(0,3,-1)=(0,0,-1)(a,b,c)$

$1=-c \rightarrow \boxed{c=-1}$

$(1,-2,0)(1,2,-5)=(1,-2,0)(a,b,c)$

$1-4=a-2b \rightarrow \boxed{a-2b=-3}$ ..... (2)

من ① نجد:

$$a+b=5$$
$$a-2b=-3$$
$$3b=8 \longrightarrow \boxed{b=\frac{8}{3}}$$
$$a+\frac{8}{3}=5 \longrightarrow \boxed{a=\frac{7}{3}}$$

ومنه يكون شعاع سرعة النقطة A هو:

$$\vec{v}(M)=\left(\frac{7}{3},\frac{8}{3},-1\right)$$

تمارين:

1 لتكن لدينا النقاط A, B, C $\in$ مجموعة مادية

$A(0,0,1)$, $B(1,1,0)$, $C(1,2,-1)$

ولدينا:

$\vec{v}(A)=(0,1,2)$, $\vec{v}(B)=(0,0,1)$, $\vec{v}(C)=(-1,1,1)$

هل المجموعة التي أخذت منها النقطة متماسكة أم لا.

2 صفيحة بشكل مثلث متساوي الساقين OAB رأسها O ثابت برهن أنه قياس مسقط سرعة النقطة A على OB يساوي قياس مسقط سرعة النقطة B على OA.