كلية العلوم قسم الرياضيات - جامعة دمشق | السنة : الثانية

المقرر : بنى جبرية (1) | الفصل : الأول

المحاضرة : (2) | التاريخ : 2013/9/23

تمهيدية :

بفرض $\sum$ تجزئة للمجموعة P , العلاقة ρ المعرفة بالشكل :

$$\forall\, a,b \in P\,,\ a\rho b \iff \exists\, B \in \textstyle\sum : a,b \in B$$

هي علاقة تكافؤ , صفوف تكافؤ العلاقة ρ هي وفقط هي عناصر التجزئة $\sum$. أي أنّ $\sum = P/\rho$

البرهان :

لتكن $B \in \sum$ عندئذٍ : $B \neq \emptyset$ وبالتالي يوجد $b \in B$, ولنبرهن على أنّ $\bar{b} = B$

ليكن $x \in B$, $b,x \in B$ وحسب التعريف فإن $x\rho b$, $x \in \bar{b}$ ومنه $B \subseteq \bar{b}$

ليكن $y \in \bar{b}$ عندئذٍ $b\rho x$ ومنه يوجد $D \in \sum$ بحيث $y,b \in D$ ومنه $b \in D \cap B$

وبالتالي يكون $D = B$ أي أنّ $y \in D = B$ ومنه $\bar{b} \subseteq B$

ومن الاحتوائين $B \subseteq \bar{b}$, $\bar{b} \subseteq B$ يكون $B = \bar{b}$ ومنه $\sum \subseteq P/\rho$

وليكن $\bar{a} \in P/\rho$ عندئذٍ $a \in P$ وبما أنّ $P = \bigcup_{D \in \sum} D$

ومنه يوجد $D \in \sum$ بحيث $a \in D$ ولنبرهن على أنّ $\bar{a} = D$

ليكن $x \in D$ عندئذٍ $a,x \in D$ ومنه $a\rho x$ وبالتالي $x \in \bar{a}$ ومنه $D \subseteq \bar{a}$

ليكن $y \in \bar{a}$ عندئذٍ $a\rho y$ ومنه يوجد $H \in \sum$ بحيث $a,y \in H$ ومنه $a \in H \cap D$ ومنه $H = D$

أي $y \in D$ ومنه $\bar{a} \subseteq D$ ومن الاحتوائين $D \subseteq \bar{a}$, $\bar{a} \subseteq D$ يكون $\bar{a} = D \in \Sigma$ ومنه $P/\rho \subseteq \sum$

ومن الاحتوائين $\sum \subseteq P/\rho$, $P/\rho \subseteq \sum$ يكون $\sum = P/\rho$ وهو المطلوب

مبرهنة : لتكن Θ , Σ تجزئتين للمجموعة P الغير الخالية ولتكن $\underset{\theta}{\rho}$, $\underset{\Sigma}{\rho}$ علاقتي التكافؤ الناتجتين عن التجزئتين على الترتيب

عندئذٍ :
$$\Sigma = \Theta \Leftrightarrow \underset{\Sigma}{\rho} = \underset{\theta}{\rho}$$

اللإثبات :

" لزوم الشرط "

لنفرض أنّ $\Sigma = \theta$ عندئذٍ :

ليكن $(a,b) \in \underset{\Sigma}{\rho}$ حيث $a,b \in P$ عندئذٍ :

ومنه يوجد $a\underset{\Sigma}{\rho}b$ $B \in \Sigma$ بحيث $a,b \in B$ وبما أنّ $B \in \Theta$ وأنّ $a,b \in B$ فإنّ $a\underset{\theta}{\rho}b$

ومنه $(a,b) \in \underset{\theta}{\rho}$ ومنه يكون $\underset{\Sigma}{\rho} \subseteq \underset{\theta}{\rho}$

ليكن $(c,d) \in \underset{\theta}{\rho}$ حيث $c,d \in P$ عندئذٍ :

ومنه يوجد $c\underset{\theta}{\rho}d$ $D \in \Theta$ بحيث $c,d \in D$ وبما أنّ $D \in \Sigma$ وأنّ $c,d \in D$ فإنّ $c\underset{\Sigma}{\rho}d$

ومنه $(c,d) \in \underset{\Sigma}{\rho}$ ومنه يكون $\underset{\theta}{\rho} \subseteq \underset{\Sigma}{\rho}$

ومن الاحتوائين $\underset{\theta}{\rho} \subseteq \underset{\Sigma}{\rho}$, $\underset{\Sigma}{\rho} \subseteq \underset{\theta}{\rho}$ يكون $\underset{\Sigma}{\rho} = \underset{\theta}{\rho}$.

" كفاية الشرط "

لنفرض أنّ العلاقتين $\underset{\Sigma}{\rho} = \underset{\theta}{\rho}$

$P/\rho = \Sigma$ حسب التمهيدية السابقة فإنّ :
$$\frac{P}{\underset{\Sigma}{\rho}} = \Sigma \quad = \quad \Theta = \frac{P}{\underset{\theta}{\rho}}$$

مبرهنة : لتكن P مجموعة غير خالية و $\Im$ التجزئات المعرفة على المجموعة P و $\Im_0$ مجموعات (علاقات) التكافؤ المعرفة على المجموعة P عندئذٍ : يوجد تطبيق تقابل

$$f : \Im \longrightarrow \Im_0$$

الإثبات :

لنعرف العلاقة : $f : \Im \longrightarrow \Im_0$ بالشكل

$$\forall \sum \in \Im : f\left(\sum\right) = \underset{\Sigma}{\rho} \in \Im_0$$

f تطبيق : $\forall \sum, \theta \in \Im : \theta = \sum \Rightarrow \underset{\theta}{\rho} = \underset{\Sigma}{\rho} \Rightarrow f(\theta) = f\left(\sum\right)$

التطبيق f متباين لأنّ :

$$f\left(\sum\right) = f(\theta) \Rightarrow \underset{\Sigma}{\rho} = \underset{\theta}{\rho} \Rightarrow \sum = \theta$$

التطبيق f غامر لأنّ : لتكن $\rho \in \Im_0$ عندئذٍ :

$$P/\rho \in \Im \Rightarrow f\left(\frac{P}{\rho}\right) = \rho$$

علاقة الترتيب

لتكن ρ علاقة معرفة على المجموعة P , نقول عن ρ إنها علاقة ترتيب جزئية على P إذا كانت : " انعكاسية , تخالفية , متعدية " .

ويُرمّز عادةً لعلاقة الترتيب بالشكل $(\leq)$

$$a \leq b \Leftrightarrow a\rho b \begin{cases} a = b \\ a < b \end{cases}$$

مبرهنة : لتكن P مجموعة غير خالية و $(\leq)$ علاقة انعكاسية ومتعدية معرفة على P عندئذٍ :

1- العلاقة ρ المعرفة بالشكل :

$$\forall a, b \in P \ , a\rho b \Leftrightarrow a \leq b \ \wedge \ b \leq a$$

هي علاقة تكافؤ على المجموعة P . ((يُترك إثباتها وظيفة))

2- العلاقة $(\leq)$ المعرفة على P/ρ بالشكل :

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in P/\rho; \ \bar{a} \leq \bar{b} \ \Leftrightarrow a \leq b$$

هي علاقة ترتيب معرفة على (P/ρ) .

إثبات العلاقة (2) :

لنبرهن أنّ العلاقة " $\leq$ " المعرفة على المجموعة P/ρ معرفة جيداً .

لتكن $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d} \in P/\rho$ بحيث $\bar{a} = \bar{b}$, $\bar{c} = \bar{d}$

بفرض أنّ $\bar{a} \leq \bar{c}$ ولنبرهن أنّ $\bar{b} \leq \bar{d}$

بما أنّ $\bar{a} = \bar{b}$ عندئذٍ : $a \in \bar{a} = \bar{b}$ ومنه $a\rho b$ وحسب (1) فإنّ $\boxed{a \leq b \ \wedge \ b \leq a}$

ولدينا $\bar{c} = \bar{d}$ ومنه $c \in \bar{d}$ أي أنّ $c\rho d$ أي $\boxed{c \leq d \ \wedge \ d \leq c}$

بما أنّ $\bar{a} \leq \bar{c}$ فإنّ $\boxed{a \leq c}$

وبما أنّ $\left.\begin{matrix} b \leq a \\ a \leq c \end{matrix}\right\} \Longrightarrow b \leq c$

ولدينا $c \leq d$ ومنه $b \leq d$ وحسب الفرض نجد $\bar{b} \leq \bar{d}$

ومما سبق نجد أنّ العلاقة $\leq$ معرفة جيداً *((يُترك إثبات أنها علاقة ترتيب وظيفة))*

تعريف :
لتكن " $\leq$ " علاقة ترتيب معرفة على المجموعة P نسمي الثنائية $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

تعريف : لتكن P مجموعة مرتبة جزئياً , وليكن $a \in P$

1- نقول عن العنصر $a \in P$ أنه عنصر أصغر في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall\, x \in P \ : \ a \leq x$$

2- نقول عن العنصر $a \in P$ إنه عنصر أصغري في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall\, b \in P \ , \ b \leq a \Longrightarrow b = a$$

3- نقول عن العنصر $a \in P$ أنه عنصر أكبر في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall\, y \in P \ ; \ y \leq a$$

4- نقول عن العنصر $a \in P$ إنه عنصر أعظمي في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall\, z \in P \ , \ a \leq z \ \Longrightarrow a = z$$

... انتهت المحاضرة ...