كلية العلوم قسم الرياضيات ـ جامعة دمشق   السنة : الثالثة

المقرر : البنى الجبرية (3)   الفصل : الأول

المحاضرة : (4)   التاريخ : 2013/10/08

مسائل أساسية :

المسألة الأولى : إذا كان $f: A \longrightarrow B$, $g: A \longrightarrow C$ تشاكلين مودوليين , ماهي الشروط الواجب توافرها لوجود تشاكل $h: B \longrightarrow C$ الذي يحقق : $hof = g$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

مخطط تبادلي

المسألة الثانية : إذا كان $f: B \longrightarrow A$, $g: C \longrightarrow A$ تشاكلين مودوليين , ماهي الشروط الواجب توافرها لوجود تشاكل $h: C \longrightarrow B$ بحيث يحقق : $foh = g$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

مبرهنة : إذا كانت A, B, C ثلاث مجموعات غير خالية , وكان :

$f: A \longrightarrow B$, $g: A \longrightarrow C$ تطبيقين فإن القضيتين التاليتين متكافئتين :

1ـ يوجد تطبيق $h: B \longrightarrow C$ يحقق :

$\boxed{hof = g}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

2ـ إذا كان $f(x_1) = f(x_2)$ فإن $g(x_1) = g(x_2)$ وذلك أيا كان $x_1, x_2 \in A$

$1 \Longrightarrow 2$: لنفرض أن $f(x_1) = f(x_2)$ بحيث $(x_1, x_2 \in A)$ فإن :

$g(x_1) = hof(x_1) = h(f(x_1)) = h(f(x_2)) = hof(x_2) = g(x_2)$ وهو المطلوب

2 $\Leftarrow$ 1 : لنأخذ العلاقة

$$t: Imf \longrightarrow C$$
$$f(x) \longmapsto g(x)$$

إنّ t تطبيق , لأنه إذا كان $f(x_1) = f(x_2)$ فإن $g(x_1) = g(x_2)$ حسب الفرض 2

أي : $t\big(f(x_1)\big) = t\big(f(x_2)\big)$

لنأخذ ممدود t على المجموعة B : $h: B \longrightarrow C$

$$h(b) = \begin{cases} t(b) \ ; & b \in Imf \\ c_0 \ ; & b \notin Imf \end{cases}$$

وأنه أيا كان $a \in A$ فإن :

$$hof(a) = h\big(f(a)\big) = t\big(f(a)\big) = g(a) \Longrightarrow hof = g$$

مبرهنة : إذا كان A, B, C ثلاث مجموعات غير خالية , وكان :
$g: C \longrightarrow A \ , \ f: B \longrightarrow A$ تطبيقين فإنّ القضيتين التاليتين متكافئتين :

1ـ يوجد تطبيق $h: C \longrightarrow B$ يحقق : $foh = g$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

2ـ $Img \subseteq Imf$.

الإثبات : 1 $\Leftarrow$ 2 : أيا كان $c \in C$, $g(c) \in Img$ فإن :

$$g(c) = foh(c) = f\big(h(c)\big) \in Imf \Longrightarrow Img \subseteq Imf$$

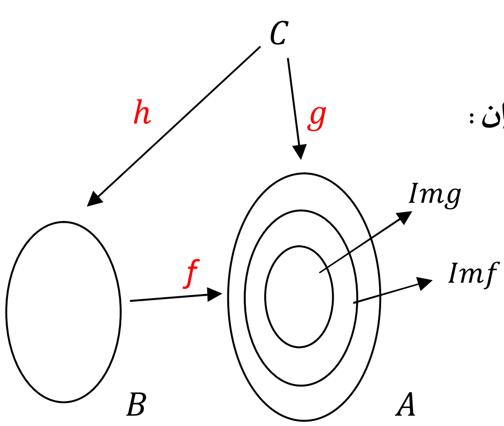
2 $\Leftarrow$ 1 :

أيا كان $x \in C$ فإن $g(x) \in A$ وبما أن $Img \subseteq Imf$ فإن :

$g(x) \subseteq Imf$ وبالتالي يوجد $y \in B$ بحيث يكون

$f(y) = g(x)$ (y ليس وحيد بالضرورة

لأن f ليس متباين بالضرورة)



من أجل كل عنصر $x \in C$ يوجد عنصر $y_x \in B$ بحيث $f(y_x) = g(x)$

بالتالي نحصل على التطبيق :

$$h: C \longrightarrow B$$

$$h(x) = y_x$$

وأنه أيا كان $\quad foh(x) = f\big(h(x)\big) = f(y_x) = g(x)$

((قلنا إن h تطبيق لأن كل عنصر x من المنطلق C يرتبط بعنصر وحيد من المستقر $y_x \in B$

نلاحظ بأننا أهملنا باقي العناصر y التي يرتبط بها " أخذنا فقط y_x ")) .

ينتج من المبرهنتين السابقتين النتيجتين التاليتين :

1ـ إذا كان $f: A \longrightarrow B$ تطبيق , فإن القضايا التالية متكافئة :

1. f متباين .
2. يوجد تطبيق $g: B \longrightarrow A$ بحيث $gof = I_A$ التطبيق المطابق .
3. f قابل للاختصار من اليسار أي :

$$foh = fok \Longrightarrow h = k$$

بحيث $\quad h, k: C \longrightarrow B$

2ـ إذا كان $f: A \longrightarrow B$ تطبيق , فإن القضايا التالية متكافئة :

1. f غامر .
2. يوجد تطبيق $g: B \longrightarrow A$ بحيث $fog = I_B$.
3. f قابل للاختصار من اليمين أي :

$$hof = kof \Longrightarrow h = k$$

بحيث $\quad h, k: B \longrightarrow C$

ملاحظة :

$A \in \underset{n}{M}(\mathbb{R})$ فهل A قلوبة ؟

الجواب :

إذا وجدنا $B \in \underset{n}{M}(\mathbb{R})$ بحيث $A.B = I_n$ تكون A قلوبة وبالتالي B مقلوب A وهذا الشرط كافي .

أما الشرط الثاني $B.A = I_n$ فهو شرط إضافي .

لأنه إذا كان الشرط الأول محقق فلا يمكن أن لا يكون الشرط الثاني محقق .

لأننا نعلم أنه لكل مصفوفة مربعة تقابل :

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, إذا كان f متباين وغامر فإن :

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A.B = I \Leftarrow gof = I$$

$$B.A = I$$

... انتهت المحاضرة الرابعة ...