8/10/2013

المحاضرة الثالثة

مثال: فضاء المتتاليات ℓ^p حيث $p \geq 1$

نعرف كل عنصر من الفضاء ℓ^p بأنه متتالية $x = (\xi_i) = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ من الأعداد بحيث تكون المتسلسلة $|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \ldots$ متقاربة

أي:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$$

لنأخذ عنصر آخر من ℓ^p وليكن $y = (\eta_i)$ سنعرف المسافة d بالشكل:

$$d(x,y) = \left(\sum_{i \geq 1} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

فنجد أن الدالة متري [تحقق من الشروط]

وفي الحالة الخاصة عندما $p = 2$ نحصل على ℓ^2 [فضاء هلبرت]

ونجد فضاء المتتاليات لهلبرت ℓ^2 حيث يحدد المتري بالمساواة:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i \geq 1} |\xi_i - \eta_i|^2}$$

- بعض المفاهيم الطوبولوجية الهامة:

ليكن (X, d) فضاءً مترياً ولتكن $x_0 \in X$ وليكن $r > 0$ (حقيقي موجب تماماً)

نعرف الكرة المفتوحة بأنها:

$$B(x_0, r) = \{x \in X ; d(x, x_0) < r\}$$

ندعو $B(x_0, r)$ بالكرة المفتوحة التي مركزها x_0 و نصف قطرها r

وأما:

$$\tilde{B}(x_0, r) = \{x \in X ; d(x, x_0) \leq r\}$$

بالكرة المغلقة التي مركزها x_0 ونصف قطرها r.

وأما:

$$S(x_0, r) = \{x \in X ; d(x, x_0) = r\}$$

فتدعى بالقشرة الكروية.

ملاحظة:

$$S(x_0,r)=\tilde{B}(x_0,r)-B(x_0,r)$$

تمثل الكرة المفتوحة في $\mathbb{R}$ المجال المفتوح $]x_0-r,x_0+r[$ وأما في $\mathbb{R}^2$ فهي تمثل القرص الدائري الذي مركزه x_0

- النقطة الداخلية: لتكن $\phi\neq M\subseteq X$

نقول عن النقطة $x_0\in M$ إنها داخلية في M إذا استطعنا أن نجد كرة مفتوحة مثل $B(x_0,\varepsilon)$ بحيث تكون $B\subseteq M$

- يعرف داخل M بأنه مجموعة كل النقاط الداخلية من M ويرمز له بـ M°

ملاحظة: يبرهن على أن M° هو أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في M.

ملحوظة ①: $M^{\circ\circ}=M^\circ$ لأن M° مجموعة مفتوحة.

ملاحظة ②: إذا كانت M مجموعة مفتوحة عندئذٍ $M=M^\circ$

- المجموعة المفتوحة: هي المجموعة التي جميع نقاطها داخلية.
- المجموعة المغلقة: نقول عن مجموعة جزئية مثل M من فضاء متري X إنها مغلقة إذا وفقط إذا كانت متممتها مجموعة مفتوحة

Example:

إن المجموعة $[-1,+1]$ هي مجموعة مغلقة لأن متممتها هي:

$]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

وهذا الاجتماع مجموعة مفتوحة لأنه اجتماع مجموعتين مفتوحتين

ملاحظة: $]-1,+1]$ لا مفتوحة ولا مغلقة.

ملاحظة: المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان والمغلقتان بآنٍ واحد في فضاء متري (X,d) هما: ϕ,X

- النقطة المحيطية: لتكن $\phi\neq M\subseteq X$ ولتكن $x\in M$:

نقول عن x إنها نقطة محيطية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

أياً كانت الكرة المفتوحة $B(x_0,\varepsilon)$ فهي تتقاطع من M ومع المتممة M^c بغير خال ويرمز لمجموعة جميع النقاط المحيطية بـ ∂M وتدعى محيط M.

- النقطة الحدية : (نقطة التجمع) :
نقول عن النقطة x_0 إنها نقطة حدية لـ M إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:
أياً كانت الكرة المفتوحة $B(x_0, \varepsilon)$ سوف تحوي على مجموعة غير منتهية من عناصر M أي:

$B(x_0, \varepsilon) \cap M =$ عدد غير منتهي من عناصر M

ونرمز لمجموعة نقاط التراكم (النقاط الحدية) بـ M' وندعوها بـ (المجموعة المشتقة).

- النقطة الملاصقة: نقول عن النقطة x_0 إنها ملاصقة لـ M إذا تقاطع أي جوار [كرة مركزها x_0] مع المجموعة M بليس خالي ونرمز لمجموعة النقاط الملاصقة لـ M بالرمز $\overline{M}$ وندعوها بلاصقة M

ملاحظة:
يبرهن على أن $\overline{M}$ أصغر مجموعة مغلقة تحوي M

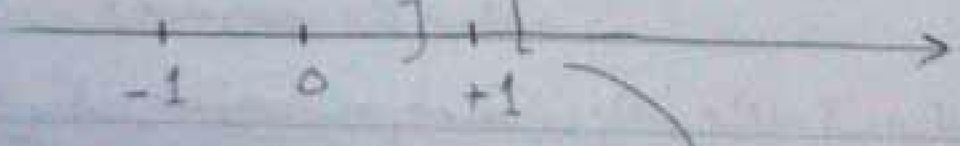
ملاحظة:
اذا كانت M مجموعة مغلقة عندئذٍ $M = \overline{M}$

ملاحظة: $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ (لأن $\overline{M}$ مجموعة مغلقة)

أمثلة: * اذا كانت $M = \{1, 2, 3\} \Longrightarrow M' = \phi , \overline{M} = M$ [لأن M منتهية]

* $M = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\}$
(0) هي مركز تجمع وحيد

* $M = \{(-1)^n\}$ [ليس لها نهاية] $M = -1, -1, -1, -1, +1, \dots$
لها مركزي تجمع $-1, +1$



ان تقاطع هذا المجال مع M يعطي عدد لانهائي

* $M =]-1, +1]$ عندئذٍ نجد ما يلي:
$M^\circ =]-1, +1[, M' = [-1, +1]$

ملاحظة: إذا كان A, B مجموعتان مفتوحتان عندئذٍ $A\cup B$ مجموعة مفتوحة

البرهان: $\forall x \in A\cup B \rightarrow x \in A$ أو $x \in B$

- إذا كان $x \in A$ فإنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث $B(x,\varepsilon) \subseteq A$ لأن A مجموعة مفتوحة أي أنه يوجد $B(x,\varepsilon) \subseteq A\cup B$ أي $x \in (A\cup B)^\circ$
- إذا كانت $x \in B$ فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث $B(x,\delta) \subseteq B$ لأن B مجموعة مفتوحة أي أنه يوجد $B(x,\delta) \subseteq A\cup B$ أي $x \in (A\cup B)^\circ$

وفي كلا الحالتين النقطة x تكون نقطة داخلية وبما أن x نقطة اختيارية فإننا نستنتج أن كل نقاط $A\cup B$ نقاط داخلية وبالتالي $A\cup B$ مجموعة مفتوحة

تعريف الجوار للنقطة x_0 من فضاء متري (X,d):
لتكن $\phi \neq M \subseteq X$، نقول عن M أنها جوار للنقطة $x_0 \in X$ إذا حوت المجموعة M كرة مفتوحة مركزها x_0.

انتهت المحاضرة