كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق

السنة: الثالثة

المقرر: التحليل العقدي (1)

الفصل: الأول

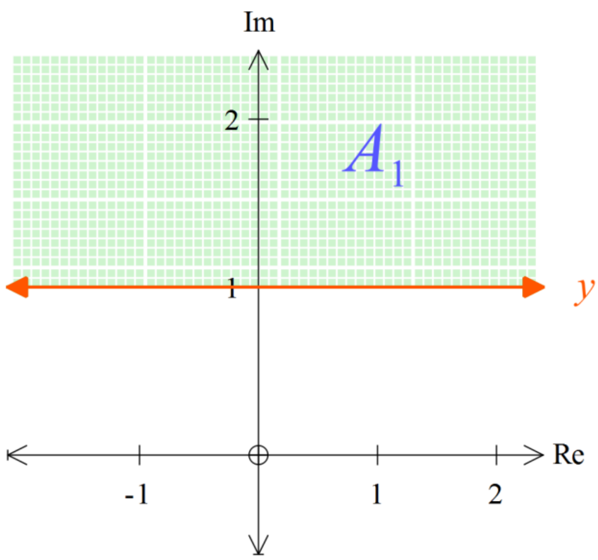
المحاضرة: (5)

المجموعات النقطية في المستوي العقدي:

وجدنا أن كل عدد عقدي يقابله نقطة وحيدة في المستوي وبالتالي من أجل $A \in C$ يمكن تمثيل A بنقاط في المستوي ندعوها المجموعة النقطية الممثلة للمجموعة A

تمرين: أوجد المجموعات النقطية التالية في المستوي العقدي:

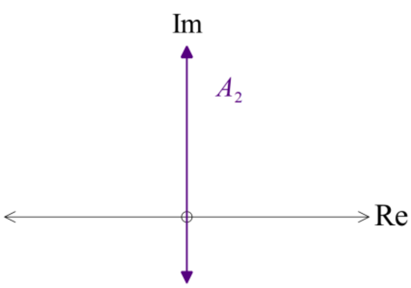
1) $A_1 = \{z \in C \,; Im(z) \geq 1\}$



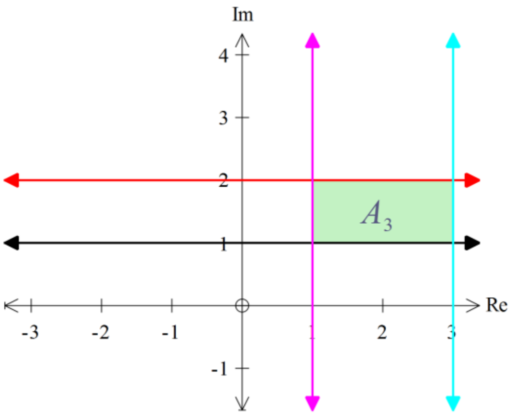
A_1 هي نصف المستوي الواقع فوق المستقيم الذي معادلته $y = 1$ مع المستقيم نفسه.

2) $A_2 = \{Z \in C \;;\; Re(z) = 0\}$

A_2هي المحور التخيلي



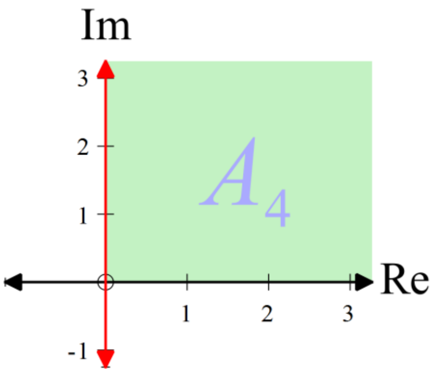
3) $A_3 = \{z \in C \,; 1 \leq Re(z) \leq 3 \,, 1 \leq Im(z) \leq 2\}$



A_3 هي عبارة عن مستطيل في المستوي

4) $A_4 = \left\{z \in C \,; 0 \leq Arg(z) \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

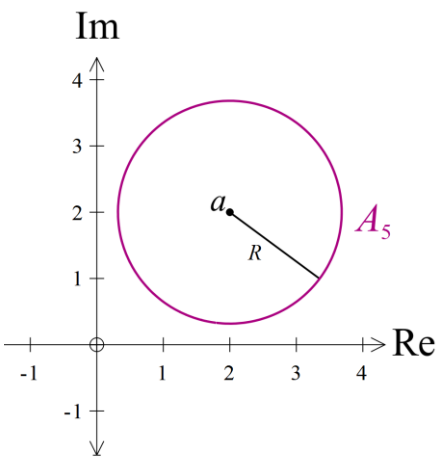
A_4 هي عبارة عن الربع الأول من المستوي العقدي مع المحاور الإحداثية



5) $A_5 = \{z \in C \,; |z-a| = R \,; a = a_1 + ia_2 \in C \,, R \in R^{+*}\}$

$$|z-a| = R \Rightarrow \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} = R$$

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = R^2$$



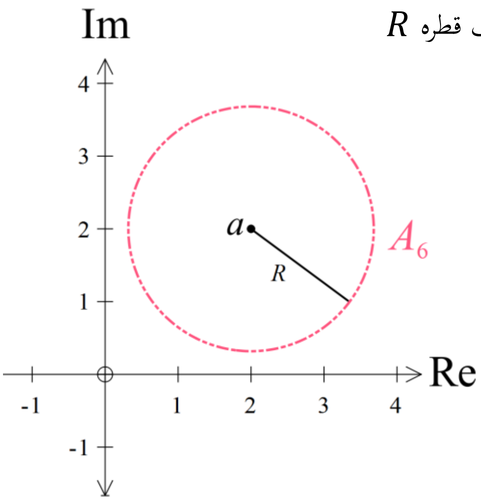
وهي معادلة دائرة في المستوي مركزها $a(a_1, a_2)$

وقطرها R ونرمز لها ب $C(a, R)$

6) $A_6 = \{z \in C \,; |z-a| < R \,; a = a_1 + ia_2 \in C \,, R \in R^{+*}\}$

A_6 هي القرص المفتوح (دون المحيط) الذي مركزه $a(a_1, a_2)$ ونصف قطره R

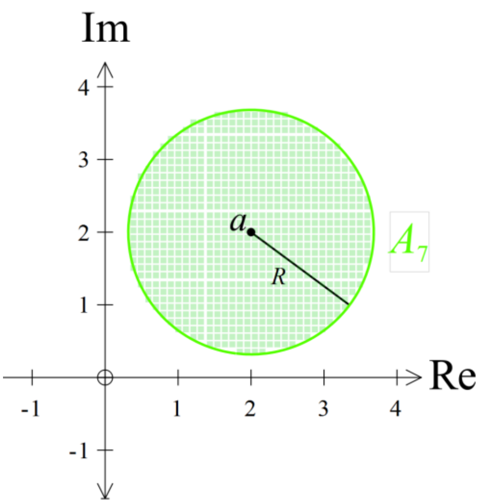
حيث نرمز له بـ $D(a,R)$



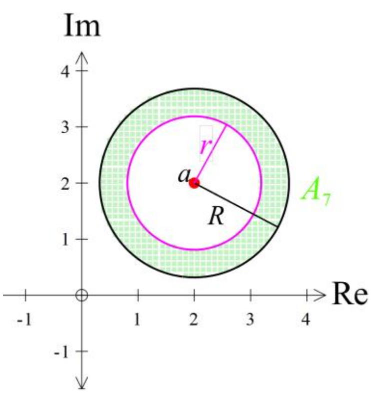
7) $A_7 = \{z \in C \,; |z-a| \leq R \,; a = a_1 + ia_2 \in C \,, R \in R^{+*}\}$

A_7 هي القرص المغلق(مع المحيط) الذي مركزه $a(a_1, a_2)$ ونصف قطره R

حيث نرمز له بـ $\overline{D}(a,R)$



8) $A_7 = \{z \in C \,; r \leq |z-a| \leq R \,; a = a_1 + ia_2 \in C \,, R, r \in R^{*+}\}$



A_8 عبارة عن حلقة نصف قطرها الداخلي r والخارجي R

حيث نرمز لها بـ $R(a,r,R)$

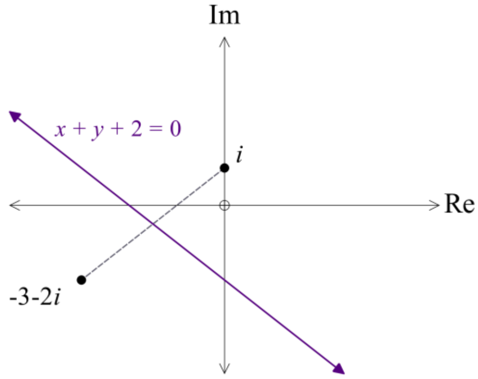
9) $A_9 = \{z \in C\ ;\ |z - i| = |z + 3 + 2i|\}$

$|x + (y - 1)i| = |(x + 3) + (y + 2)i|$

$\Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x + 3)^2 + (y + 2)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4$

$\Rightarrow x + y + 2 = 0$



A_9 هي عبارة عن مستقيم $x + y + 2 = 0$

وهو محور القطعة المستقيمة الواصلة بين *النقطتين* $i\ , -3 - 2i$

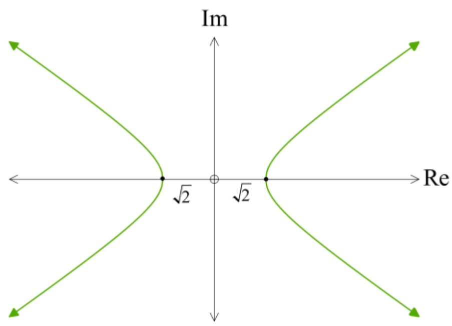
10) $A_{10} = \{z \in C\ ; (z + \bar{z})^2 + (z + \bar{z})^2 = 8\}$

$\Rightarrow (2x)^2 + (2iy)^2 = 8$

$\Rightarrow 4x^2 - 4y^2 = 8$

$\Rightarrow x^2 - y^2 = 8$

A_{10} هي نقاط قطع زائد متساوي الساقين محوره المحرقي $\overrightarrow{ox}$

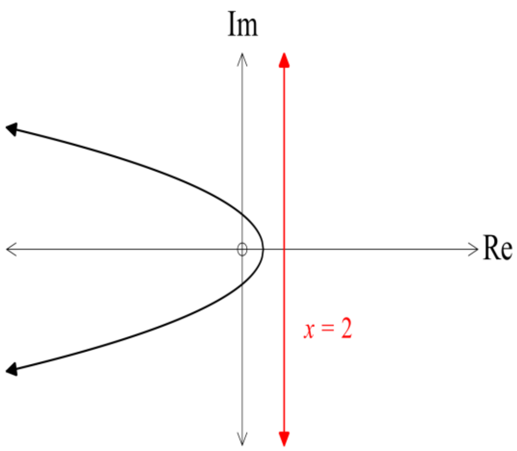


11) $A_{11} = \{z \in C\ ; Re(z) = |z|\}$

$\Rightarrow x - 2 = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow y^2 = -4(x - 1)$



نلاحظ أنَّ:

$|z| \geq 0 \Rightarrow Re(z - 2) \geq 0 \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

الشّكل الأُسيّ للأعداد العقدية: A_{11}

نعلم أنّ نشر لوران للتوابع التالية كما يلي:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} cis\ \theta &= \cos\theta + i\sin\theta \\ &= \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right] + i\left[x - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right] \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\,\theta^3}{3!} + \frac{i\,\theta^4}{4!} + \frac{i\,\theta^5}{5!} - \cdots \\ &= 1 + \frac{(\mathrm{i}\theta)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)^5}{5!} + \cdots \\ &= e^{i\theta} \end{aligned}$$

ومنه : $z = r.e^{i\theta}$ هو الشكل العدد العقدي z

مثال: الشكل الديكارتي لـ z هو : $z = 1 + \sqrt{3}\, i$

شكل الثنائية لـ z	$z = (1, \sqrt{3})$
الشكل المثلثي لـ z	$z = 2\ cis\ \frac{\pi}{3}$
الشّكل الأُسّي لـ z	$z = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

... انتهت المحاضرة (5) ...