كلية العلوم قسم الرياضيات - جامعة دمشق

السنة : الثانية

المقرر : تحليل عددي (1)

الفصل : الأول

المحاضرة : (3)

التاريخ : 2013/10/7

الطرق العددية لحل المعادلات :

أولاً : طريقة تنصيف المجال :

وهي طريقة تقريبية للحصول على مجال طوله صغير جداً وليكن ε ((حسب الدقة المطلوبة)) يحوي جذراً للمعادلة المطلوبة وهي على الشكل :

ليكن $f(x)$ تابع مستمر على المجال $[a,b]$ حيث أن $f(a).f(b) < 0$

لنفرض أن $f(a) < 0\,; f(b) > 0$ وليكن α جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a,b]$

نقوم بتنصيف المجال $[a,b]$ وليكن $x_1 = \frac{a+b}{2}$ منتصف المجال عندئذٍ نميز الحالات :

- إذا كان $f(x_1) > 0$ عندئذٍ $\alpha \in [a,x_1]$
- إذا كان $f(x_1) < 0$ عندئذٍ $\alpha \in [x_1,b]$
- إذا كان $f(x_1) = 0$ عندئذٍ $\alpha = x_1$ ويتم المطلوب ((لكن هذه حالة نادرة جداً))

نكرر هذه العملية عدة مرات حتى نحصل على مجال طوله صغير جداً وليكن ε يحوي الجذر المطلوب

مثال (1) :

باستخدام طريقة تنصيف المجال أوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = x^3 - 9x + 1 = 0$

في المجال $[2,4]$ بدقة $\varepsilon = 0.05$

الحل :

نلاحظ أن : $f(2) = -9 < 0 \quad , \quad f(4) = 29 > 0$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[2,4]$ وليكن α ((يجب حفظ هذا السطر كما هو))

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = 3\,; f(x_1) = 1 > 0 \;\Rightarrow \alpha \in [2,3]$$

$x_2 = \frac{2+3}{2} = 2.5\,; f(x_2) = -5.875 < 0 \;\; \Rightarrow \alpha \; \in [2.5\,,3]$

$x_3 = 2.75\,; f(x_3) = -2.9531 < 0 \;\; \Rightarrow \alpha \; \in [2.75\,,3]$

$x_4 = 2.875\,; f(x_4) = -1.1113 < 0 \;\; \Rightarrow \alpha \; \in [2.875\,,3]$

$x_5 = 2.9375\,; f(x_5) = -0.09 < 0 \;\; \Rightarrow \alpha \; \in [2.9375\,,3]$

$x_6 = 2.96875\,; f(x_6) = 0.4462 > 0 \;\; \Rightarrow \alpha \; \in [2.9375\,,\; 2.96875]$

نلاحظ أن بُعد المجال السابق هو $|x_6 - x_5| = 0.03125 < \varepsilon$

$\Rightarrow \alpha \approx x_6 = 2.96875$ ((يمكن تقريب α لأي من طرفي المجال لكن يفضل تقريبه للطرف الأكبر))

مثال (2) :

باستخدام طريقة تنصيف المجال أوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = 3x + \sin x - e^x = 0$

في المجال $[1,2]$ بدقة $\varepsilon = 0.075$

الحل :

نلاحظ أن : $f(1) = 1.1232 > 0 \quad , \quad f(2) = -0.4797 < 0$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[1,2]$ وليكن α

$x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5\,; f(x_1) = 1.0158 > 0 \;\; \Rightarrow \alpha \; \in [1.5\,,2]$

$x_2 = 1.75\,; f(x_2) = 0.4794 > 0 \;\; \Rightarrow \alpha \; \in [1.75\,,2]$

$x_3 = 1.875\,; f(x_3) = 0.0583 > 0 \;\; \Rightarrow \alpha \; \in [1.875\,,2]$

$x_4 = 1.9375\,; f(x_4) = -0.1954 < 0 \;\; \Rightarrow \alpha \; \in [1.875\;,\; 1.9375]$

نلاحظ أن بُعد المجال السابق هو $|x_4 - x_3| = 0.0625 < \varepsilon$

$\Rightarrow \alpha \approx x_4 = 1.9375$

ملاحظات :

- ❖ نلاحظ أنه مع كل اختيار جديد لـ x_n فإن $f(x_n)$ تقترب أكثر من الصفر
- ❖ نلاحظ أنه مع كل مرة ننصف فيها المجال فإن بعده يصبح نصف قيمته السابقة أيضاً

تقدير الخطأ المرتكب بطريقة تنصيف المجالات :

بفرض α جذر فعلي للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a, b]$

وليكن x_n منتصف المجال الذي نحصل عليه بعد n خطوة عندئذٍ :

$$|x_n - x_{n-1}| = \frac{b-a}{2^n} \Longrightarrow |x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n}$$

أي بعد x_n عن α اصغر من الدقة المطلوبة

مثال (3) :

باستخدام طريقة تنصيف المجال أوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = \cos x - 2x = 0$

في المجال $[0,1]$ بدقة $\varepsilon = 0.075$

الحل :

نلاحظ أن : $f(0) = 1 > 0 \quad , \quad f(1) = -1.4597 < 0$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[0,1]$ وليكن α

$x_1 = 0.5 \, ; f(x_1) = -0.1224 < 0 \ \Rightarrow \alpha \in [0 \, , 0.5]$

$x_2 = 0.25 \, ; f(x_2) = 0.4689 > 0 \ \Rightarrow \alpha \in [0.25 \, , 0.5]$

$x_3 = 0.375 \, ; f(x_3) = 0.1805 > 0 \ \Rightarrow \alpha \in [0.375 \, , 0.5]$

$x_4 = 0.4375 \, ; f(x_4) = 0.0308 > 0 \ \Rightarrow \alpha \in [0.4375 \ , \ 0.5]$

نلاحظ أن بُعد المجال السابق هو $|x_4 - x_3| = 0.0625 < \varepsilon$

$\Rightarrow \alpha \approx x_4 = 0.4375$

وظيفة :

باستخدام طريقة تنصيف المجال أوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = x - 4 \ln x = 0$

في المجال $[1,2]$ بدقة $\varepsilon = 0.02$

... انتهت المحاضرة (3) ...