أمثلة على المعادلات التفاضلية غير المتجانسة :

الشكل الأول : $y' = f(ax + by + c)$

مثال :

أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = (2x + y)^2$$

الحل :

نفرض :

$$z = 2x + y$$

$$\Rightarrow dz = 2dx + dy$$

$$\Rightarrow dy = dz - 2dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$$

ولدينا $\frac{dy}{dx} = y' = z^2$

ومنه : $z^2 = \frac{dz}{dx} - 2$ .....(1)

وهي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 2 \Rightarrow dx = \frac{dz}{z^2 + 2}$$

وبالمكاملة نحصل على :

$$x + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\, arc\, tg\, \frac{z}{\sqrt{2}}$$

نعوض الآن z بقيمتها

$$\Rightarrow \boxed{x+c=\frac{1}{\sqrt{2}}arc\ tg\ \frac{2x+y}{\sqrt{2}}}$$

الشكل الثاني :

$$y'=f(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1})$$

لها ثلاث حالات :

1) مثال على الحالة الأولى :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$(x+y+1)dx+(2x+2y+2)dy=0$$

الحل :

نختصر على $(x+y+1)$

$$\Rightarrow dx+2dy=0$$

نفصل المتحولات :

$$\Rightarrow 2dy=-dx$$

$$\Rightarrow dy=-\frac{1}{2}dx$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{2}x+c}$$

2) مثال على الحالة الثانية :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$(x+y)dx+(3x+3y-4)dy=0$$

الحل :

نفرض $z=x+y$

$$dz=dx+dy$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

ومن المعادلة المعطاة نجد :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x+y)}{3x+3y-4} = \frac{-(x+y)}{3(x+y)-4}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-z}{3z-4}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{-z}{3z-4} + 1$$

نوحد المقامات

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z-4}{3z-4} \Rightarrow$$

$$dx = \frac{3z-4}{2z-4}dz = \frac{2z-4+z}{2z-4}dx$$

$$dx = 1 + \frac{z-4+4}{2z-4}dz$$

$$\Rightarrow dx = \left[1 + \frac{1}{2}\frac{2z-4+4}{2z-4}\right]dz$$

$$\Rightarrow dx = \left[1 + \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}.\frac{4}{2z-4}\right]dz$$

$$\Rightarrow dx = \left[\frac{3}{2} + \frac{2}{2z-4}\right]dz$$

وبالمكاملة نجد :

$$x = \frac{3}{2}z + ln|2z-4| + c$$

نعوض z بقيمتها :

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}(x+y) + ln|2(x+y)-4| + c}$$

مثال أخر :

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(x-y+1)dx+(x-y+2)dy=0$$

الحل :

نفرض $z=x-y$

$$\Rightarrow dz=dx-dy$$

$$\Rightarrow dy=dx-dz$$

ومنه

$$\Rightarrow (z+1)dx+(z+2)dy=0$$

$$\Rightarrow (z+1)dx+(z+2)(dx-dz)=0$$

$$zdx+dx+zdx+2dx+zdz-2dz=0$$

$$(2z+3)dx-(z+2)dz=0$$

$$(2z+3)dx=(z+2)dz$$

$$\Rightarrow dx=\left(\frac{z+2}{2z+3}\right)dz$$

$$\Rightarrow dx=\frac{1}{2}\left(\frac{2z+4}{2z+3}\right)dz$$

$$dx=\frac{1}{2}\left(\frac{2z+3+1}{2z+3}\right)dz$$

$$dx=\left(\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{4}.\frac{2}{2z+3}\right)dz$$

بالمكاملة نجد :

$$x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}ln|2z+3|+c$$

نعوض z بقيمتها فنجد :

$$\boxed{x=\frac{1}{2}(x-y)+\frac{1}{4}ln|2(x-y)+3|+c}$$

3) مثال على الحالة الثالثة :

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$$

الحل :

نحل المعادلتين ((معادلتي المستقيم حل مشترك))

$$x+y-2=0 \quad \text{.....(1)}$$

$$x-y+4=0 \Rightarrow x=y-4$$

من (1) نجد :

$$y-4+y-2=0 \Rightarrow 2y=6$$

$$\Rightarrow y=3$$

ومن (1) نجد : $x=-1$

وبالتالي : $\alpha=-1\ ,\ \beta=3$

ومنه :

$$x=X+\alpha \Rightarrow x=X-1$$

$$y=Y+\beta \Rightarrow y=Y+3$$

نعوض في المعادلة فنجد :

$$(X-1+Y+3-2)dx+(X-1-Y-3+4)dy=0$$

$$\Rightarrow (X+Y)dX+(X-Y)dY=0$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{Y}{X}\right)dX+\left(1-\frac{Y}{X}\right)dY=0$$

نفرض : $\frac{Y}{X}=Z \Rightarrow Y=Z.X$

$$\Rightarrow dY=XdZ+ZdX$$

ثم نكمل الحل ((وظيفة))

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى :

تعريف :

نقول عن المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى أنها خطية إذا كتبت على الشكل التالي :

$$y' + p(x)y = q(x) \quad \text{.....(1)}$$

إذا كانت $q(x) = 0$

فتكتب المعادلة بالشكل :

$$y' + p(x)y = 0 \quad \text{.....(2)}$$

ونطلق عليها معادلة تفاضلية خطية متجانسة أو معادلة بدون طرف ثانٍ.

لإيجاد الحل العام للمعادلة ....(1)

نوجد أولاً الحل العام للمعادلة الخطية المتجانسة :

$$y' + p(x).y = 0$$

$$y' = -p(x).y$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x).y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

بالمكاملة نجد :

$$ln|y| = -\int p(x)dx + ln|c|$$

$$ln|y| - ln|c| = -\int p(x)dx$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int p(x)dx$$

$$\Rightarrow \frac{y}{c} = e^{-\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = c.e^{-\int p(x)dx}} \quad \text{.....(3)}$$

وهو الحل العام للمعادلة الخطية بدون طرف ثانٍ.

نوجد الحل الخاص مع طرف ثاني :

بجعل c تابع لـ x

$$y = c(x).e^{-\int p(x)dx}$$

بالإشتقاق :

$$y' = c'(x).e^{-\int p(x)dx} - c(x).p(x).e^{-\int p(x)dx}$$

نعوض في ...(1)

$$c'(x).e^{-\int p(x)dx} - c(x).p(x).e^{-\int p(x)dx} + p(x).c(x).e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

ملاحظة : إن لم يُختصر الحدين الثاني والثالث فحتماً هناك خطأ في الحل.

$$\Rightarrow c'(x).e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = q(x).e^{+\int p(x)dx}$$

بالمكاملة :

$$c = \int q(x).e^{+\int p(x)dx}.dx + c_1$$

نعوض في .....(3)

$$y = \left[\int q(x).e^{+\int p(x)dx}.dx + c_1\right]e^{-\int p(x)dx}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى .

... انتهت المحاضرة (5) ...