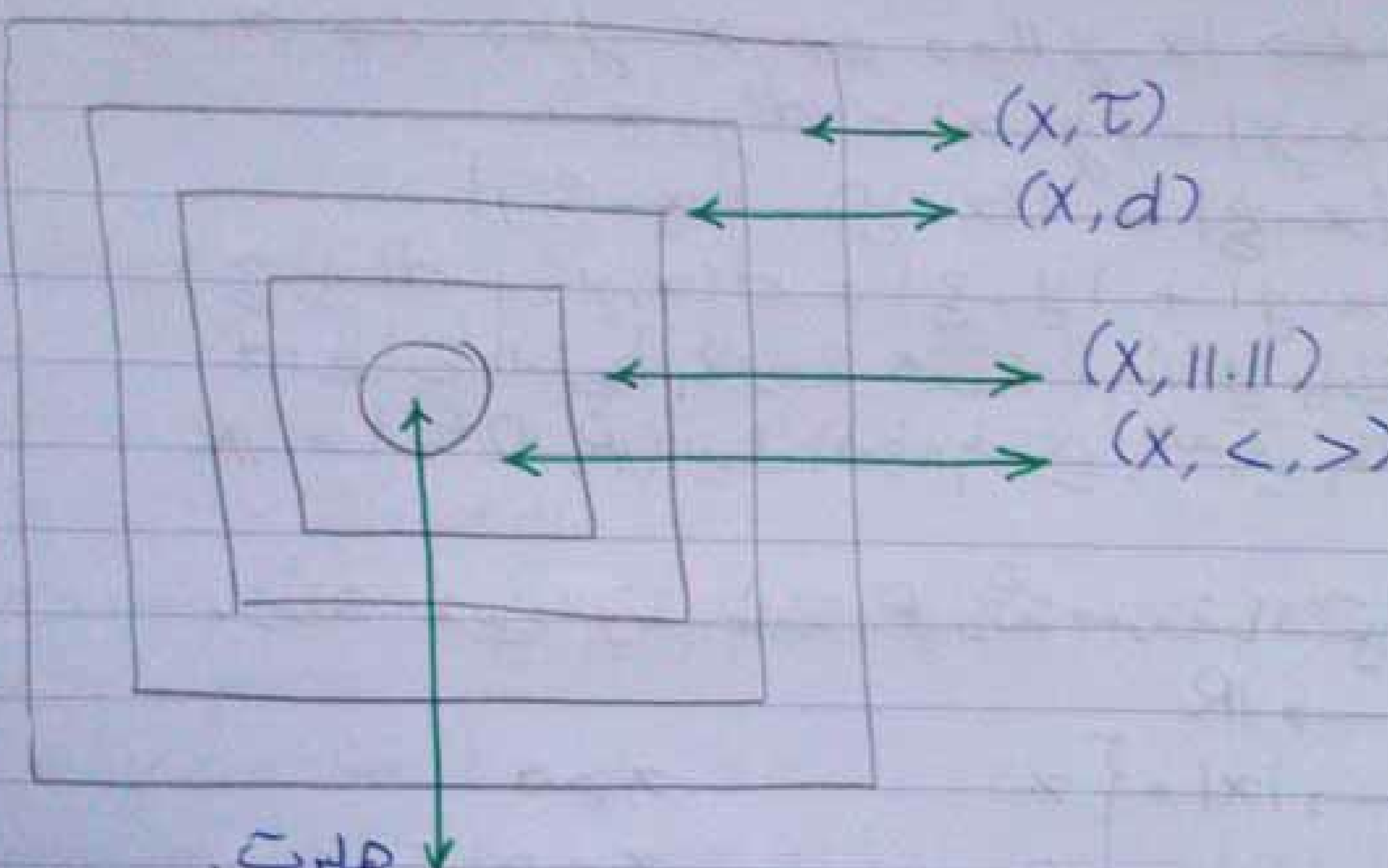
التحليل التابعي (١)

سؤال: لماذا كل فضاء متري هو فضاء طبولوجي؟

الجواب: لأننا بواسطة المسافة d نبني جملة من المجموعات المفتوحة التي تحقق شروط الطبولوجيا.



الفضاءات المترية:

تعريف: لتكن X مجموعة ما، نقول عن التابع $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ و تحقق الشروط التالية:

$d_1)$ $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$

أياً كان عنصرين من الفضاء X فإن المسافة بينهما غير سالبة

$d_2)$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$d_3)$ $d(x,y) = d(y,x)$

$d_4)$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ يمكن التعميم حتى n عنصر

عندئذ ندعو d بدالة مسافة

وأما (X, d) يدعى بالفضاء المتري [فضاء متري].

مثال: $(\mathbb{R}, |\ |)$ والذي يدعى بالفضاء المتري الحقيقي المألوف

البرهان: لنأخذ $X = \mathbb{R}$ ولنأخذ التطبيق $d: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto d(x,y) = |x-y|$$

نلاحظ التالي: $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$:

1) $d(x,y) = |x-y| \geq 0$

2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

3) $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

4) $d(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)|$

$\leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$

نلاحظ أن الشروط الأربعة محققة وبالتالي فإن d هي مسافة على $\mathbb{R}$ وأن $(\mathbb{R}, |\ |)$ يدعى بالفضاء المتري الحقيقي المألوف.

ملاحظة: تعريف القيمة المطلقة: هي دالة معرفة بالشكل التالي:

$$|\ |: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto |x| = \begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

- قيم هذه الدالة قيم حقيقية غير سالبة.
- هي دالة حقيقية لأن قيمها حقيقية.
- القيمة المطلقة لأي عدد من $\mathbb{R}$ هو عدد حقيقي غير سالب.
- الدالة التي مجموعة قيمها 0 أو موجب تدعى دالة موجبة

وهذه الدالة تتمتع بالخواص التالية:

I) $|x| \geq 0$

II) $|x.y| = |x|.|y|$

III) $\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$; $b \neq 0$

IV) $|x+y| \leq |x|+|y|$

V) $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$

VI) $||a|-|b|| \leq |a \mp b|$

I) $|x| \geq 0$ محققة حسب التعريف

II) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

نميز الحالات التالية:

1) $x>0 , y>0$

$\Rightarrow x \cdot y > 0 \underset{\text{التعريف}}{\overset{\text{حسب}}{\Rightarrow}} |x \cdot y| > 0$

$x>0 \Rightarrow |x|>0 \wedge y>0 \Rightarrow |y|>0 \Rightarrow |x| \cdot |y| > 0$

2) $x>0 , y<0$

$\Rightarrow x \cdot y<0 \Rightarrow |x \cdot y| > 0$

$x>0 \Rightarrow |x|>0 , y<0 \Rightarrow |y|>0 \Rightarrow |x| \cdot |y| > 0$

3) $x<0, y<0$

$\Rightarrow x \cdot y>0 \Rightarrow |x \cdot y|>0$

$x<0 \Rightarrow |x|>0 , y<0 \Rightarrow |y|>0 \Rightarrow |x| \cdot |y|>0$

4) $x<0, y>0$

$\Rightarrow x \cdot y<0 \Rightarrow |x \cdot y|>0$

$x<0 \Rightarrow |x|>0, y>0 \Rightarrow |y|>0 \Rightarrow |x| \cdot |y| > 0$

محققة في الحالات الاربع.

III)

IV) $|x+y| \leq |x| + |y|$

خاصة

$x \leq |x|$
$-x \leq |x|$

$$\left.\begin{array}{l} x \leq |x| \\ y \leq |y| \end{array}\right\} \to x+y \leq |x|+|y| \quad *$$

$$\left.\begin{array}{l} -x \leq |x| \\ -y \leq |y| \end{array}\right\} \Rightarrow -x-y = -(x+y) \leq |x| + |y| \quad **$$

من * و ** نستنتج أن

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

V) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ محققة وضوحاً حسب التعريف

VI) $||x| - |y|| \leq |x \mp y|$

$$|x| = |x+y-y| \leq |x+y| + |-y|$$
$$\leq |x+y| + |y|$$
$$\to |x| \leq |x+y| + |y|$$
$$\to |x| - |y| \leq |x+y| \quad \mathrm{I}$$

وأيضاً

$$|y| = |y+x-x| \leq |y+x| + |-x|$$
$$\leq |y+x| + |x|$$
$$\Rightarrow |y| - |x| \leq |x+y|$$
$$-(|x| - |y|) \leq |x \pm y| \quad \mathrm{II}$$

من I و II نستنتج أن

$$||x| - |y|| \leq |x+y|$$

مثال: لتكن لدينا المجموعة $X=\mathbb{R}^2$ و

$$d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \longmapsto d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

أثبت أنه d يحدد تابع مسافة.

البرهان:

$\forall x,y,z\in\mathbb{R}^2$; $x=(x_1,y_1)$, $y=(x_2,y_2)$, $z=(x_3,y_3)$ و

1) $d(x,y)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\geq 0$

2) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=0 \Leftrightarrow (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=0$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=0 \wedge (y_2-y_1)^2=0 \Leftrightarrow x_1-x_2=0 \wedge y_2-y_1=0$

$\Leftrightarrow x_1=x_2 \wedge y_1=y_2 \Leftrightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$

3) $d(x,y)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=d(y,x)$

(4) لنفرض مؤقتاً أنه توجد ثلاثة عناصر $x,y,z\in\mathbb{R}^2$ بحيث يكون:

$$d(x,z)>d(x,y)+d(y,z)$$

و $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $z=(z_1,z_2)$

(*)
$$\sqrt{(x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2} > \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}+\sqrt{(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2}$$

لنفرض أنه $a_i=x_i-y_i$ ، $b_i=y_i-z_i$ فيكون:

$a_i+b_i=x_i-z_i$ حيث $(i=1,2)$

وبالتالي تصبح * بالشكل التالي:

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} > \sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2} \geq 0$$

$$a_1^2+2a_1b_1+b_1^2+a_2^2+2a_2b_2+b_2^2 > a_1^2+a_2^2+2\sqrt{a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2}+b_1^2+b_2^2$$

$$a_1b_1+a_2b_2 > \sqrt{a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2}$$

$$a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2 > a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2$$

$$0 > a_1^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_1^2$$

$$0 \geq (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geqslant 0$$

$$0 \geq 0$$

وهذا مستحيل لأن الفرض المؤقت خاطئ

لأن متراجحة الدلتا محققة في $\mathbb{R}^2$

وبالتالي وبتحقق الشروط الأربعة تكون d مسافة على $\mathbb{R}^2$

ويكون $(\mathbb{R}^2; d)$ فضاء متري

وهو المطلوب

مثال: فضاء المتتاليات ℓ^∞

فضاء كل المتتاليات المحدودة [عناصرها حقيقية ... عقدية].

لنرمز لعناصر هذه المتتالية:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

لكل عنصر $x \in \ell^\infty$ يجب أن نجد ثابتة حقيقي C_x غير سالب بحيث:

$$|\xi_i| \leqslant C_x$$

لنعرف دالة المسافة المعرفة بالشكل:

$$\forall x, y \in \ell^\infty : d(x,y) = \sup_{i \geqslant 1} |\xi_i - \eta_i| ; y \in \ell^\infty ; y = \eta_1, \ldots, \eta_n$$

لنأخذ المجموعة:

$$X = \{ |\xi_i - \eta_i| : i \geqslant 1 \}$$

نلاحظ أنّ $X \neq \phi$

وضوحاً وذلك كون $x, y \in \ell^\infty$

كما نلاحظ أنّ:

$$|\xi_i - \eta_i| \leqslant |\xi_i| + |\eta_i| \leqslant C_x + C_y$$

وبالتالي المجموعة X محدودة وبالتالي لها $\sup$

مداخلة: مبرهنة: ١- كل مجموعة محدودة من الأعلى وغير خالية لها $\sup$

٢- كل مجموعة غير خالية ومحدودة من الأدنى لها $\inf$

لنتحقق الآن من خواص المسافة d:

1) $|\xi_i-\eta_i| \geq 0 \quad \forall i \rightarrow \sup\limits_{i\geq 1} |\xi_i-\eta_i| \geq 0$

$\Leftrightarrow d(x,y) \geq 0$ محقق

2) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow \sup\limits_{i\geq 1} |\xi_i-\eta_i| = 0 \Leftrightarrow |\xi_i-\eta_i| = 0 \quad \forall i$

$\Leftrightarrow \xi_i-\eta_i=0 \quad \forall i \Leftrightarrow \xi_i=\eta_i \quad \forall i \Leftrightarrow$
$x=y$ محقق

3) $d(x,y) = \sup\limits_{i\geq 1} |\xi_i-\eta_i| = \sup\limits_{i\geq 1} |\eta_i-\xi_i| = d(y,x)$ محقق

4) $d(x,y) \underset{?}{\leq} d(x,z)+d(z,y)$

لتكن: $\ell^\infty \ni z : \zeta_1, \zeta_2, \ldots\ldots, \zeta_n, \ldots\ldots$

$\rightarrow$
$|\xi_i-\eta_i| \leq |\xi_i-\zeta_i| + |\eta_i-\zeta_i| \leq \sup\limits_{i\geq 1} |\xi_i-\zeta_i| + \sup\limits_{i\geq 1} |\eta_i-\zeta_i|$

$\Leftarrow$ وبالتالي فإن المقدار:

$\sup\limits_{i\geq 1} |\xi_i-\zeta_i| + \sup\limits_{i\geq 1} |\eta_i-\zeta_i|$ يلعب دور حد أعلى لـ $|\xi_i-\eta_i|$

ولكن $\sup\limits_{i\geq 1} |\xi_i-\eta_i|$ هو بالتعريف أصغر حد أعلى لـ $|\xi_i-\eta_i|$

وبالتالي: $\sup\limits_{i\geq 1} |\xi_i-\eta_i| \leq \sup\limits_{i\geq 1} |\xi_i-\zeta_i| + \sup\limits_{i\geq 1} |\eta_i-\zeta_i|$

$\rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

ومتراجحة المثلث محققة في ℓ^∞

ومما سبق نستنتج أن (ℓ^∞, d) فضاء متري