* المحاضرة الثانية :- ٢/١/٢٠١٣ .

* نظرية :-

إذا كان A جبرلي ، عندئذٍ $Der(A)$ يكون أيضاً جبرلي .

- البرهان:

إنّ $Der(A)$ مقاسٍ على R .

- لنعرّف على $Der(A)$ العملية الثنائية : $[\,,\,]: Der(A)\times Der(A)\to Der(A)$

$$[d,d_1]=d\circ d_1-d_1\circ d$$

إنّ $[d,d_1]$ تداكل على A لأنه مجموع لتداكلين ، إذ نعلم أن تركيب تداكلين هو تداكل و مجموع تداكلين تداكل.

سنبيّن الآن أنّ $[d,d_1]$ هو تطبيق اشتقاق على A :

$$\begin{aligned}
[d,d_1][x,y] &= (d\circ d_1-d_1\circ d)[x,y]\\
&=(d\circ d_1)[x,y]-(d_1\circ d)[x,y]\\
&=d(d_1[x,y])-d_1(d[x,y])\\
&=d([d_1x,y]+[x,d_1y])-d_1([dx,y]+[x,dy])\\
&=d[d_1x,y]+d[x,d_1y]-d_1[dx,y]-d_1[x,dy]\\
&=[d(d_1x),y]+[d_1x,dy]+[dx,d_1y]+[x,d(d_1y)]\\
&\quad-[d_1(dx),y]-[dx,d_1y]-[d_1x,dy]-[x,d_1(dy)]\\
&=[(d\circ d_1)x,y]-[(d_1\circ d)x,y]+[x,(d\circ d_1)y]-[x,(d_1\circ d)y]\\
&=[(d\circ d_1-d_1\circ d)x,y]+[x,(d\circ d_1-d_1\circ d)y]\\
&=[[d,d_1]x,y]+[x,[d,d_1]y]
\end{aligned}$$

لأن d, d_1 خطي

ومنه نجد أنّ : $[d,d_1]\in Der(A)$

- لنبرهن الآن أنّ : $Der(A)$ هو جبرلي على R حيث :.

$[d,d_1]=d\circ d_1-d_1\circ d$ يحقق خمس موضوعات :-

1) $[d,d]=d\circ d-d\circ d=0$

2) $[d+d_1,d_2](x)=((d+d_1)\circ d_2-d_2\circ(d+d_1))(x)$

$$=d(d_2x)+d_1(d_2x)-d_2(dx)-d_2(d_1x)$$

$$=[d,d_2](x)+[d_1,d_2](x)$$

وبالتالي :

$$[d+d_1,d_2]=[d,d_2]+[d_1,d_2]$$

وبطريقة مماثلة تماماً يمكننا أن نبرهن :

3) $[d,d_1+d_2]=[d,d_1]+[d,d_2]$

4) $[\lambda d,d_1](x)=((\lambda d)\circ d_1-d_1\circ(\lambda d))(x)$

$$=(d\circ(\lambda d_1)-(\lambda d_1)\circ d)(x)$$

$$=\lambda(d\circ d_1-d_1\circ d)(x)=(\lambda[d,d_1])(x)$$

وبالتالي :

$$[\lambda d,d_1]=\lambda[d,d_1]$$

وبطريقة مماثلة يمكننا أن نبرهن :-

$$[d,\lambda d_1]=\lambda[d,d_1]$$

لنبرهن متطابقة جاكوبي :-

5) $[d,[d_1,d_2]]+[d_1,[d_2,d]]+[d_2,[d,d_1]]=0$

لنأخذ :-

* $[d,[d_1,d_2]]=d\circ[d_1,d_2]-[d_1,d_2]\circ d$

$$=d\circ(d_1\circ d_2-d_2\circ d_1)-(d_1\circ d_2-d_2\circ d_1)\circ d$$

$$=d\circ d_1\circ d_2-d\circ d_2\circ d_1-d_1\circ d_2\circ d+d_2\circ d_1\circ d \quad \dots \text{I}$$

* $[d_1,[d_2,d]]=d_1\circ d_2\circ d-d_1\circ d\circ d_2-d_2\circ d\circ d_1+d\circ d_2\circ d_1 \quad \dots \text{II}$

$* [d_2,[d,d_1]] = d_2 \circ d \circ d_1 - d_2 \circ d_1 \circ d - d \circ d_1 \circ d_2 + d_1 \circ d \circ d_2 \quad .... \text{(III)}$

بجمع (I) و (II) و (III) نجد:

$$[d,[d_1,d_2]] + [d_1,[d_2,d]] + [d_2,[d,d_1]] = 0$$

وبالتالي: $Der(A)$ جبر لي. #

*** نظرية:**

ليكن A جبر لي، وليكن x عنصراً من A. إن التطبيق:

$$ad_x : A \longrightarrow A$$

المعرّف بالصيغة: $ad_x(y) = [x,y]$ يكون تطبيق اشتقاق على A.

- البرهان:

لنثبت أولاً أنه تشاكل على المقاسي A (تطبيق خطي):

$$\forall y,z \in A \ , \ \forall \alpha,\beta \in R:$$

$$ad_x(\alpha y + \beta z) = [x, \alpha y + \beta z]$$
$$= \alpha[x,y] + \beta[x,z]$$
$$= \alpha\, ad_x(y) + \beta\, ad_x(z)$$

- لنثبت علاقة تطبيق الاشتقاق:

$$ad_x[y,z] = [x,[y,z]] \underset{\downarrow}{=} -[y,[z,x]] - [z,[x,y]]$$

حسب متطابقة جاكوبي.

$$= [[x,y],z] + [y, -[z,x]]$$ استفادة من النظرية التالية:

$$\Rightarrow ad_x[y,z] = [[x,y],z] + [y,[x,z]]$$
$$= [ad_x(y), z] + [y, ad_x(z)]$$

ومنه نجد:

$$ad_x \in Der(A) .$$

* نظرية :

ليكن A جبر لي ، عندئذ الخاصة التالية محققة :-

$$[x,y]=-[y,x]$$

- البرهان:- نعلم أنه:

$$[x+y,x+y]=0 \quad \dots \text{(I)}$$

وبالاستفادة من كون التطبيق ثنائي الخطية نجد:-

$$[x+y,x+y]=[x,x+y]+[y,x+y]$$
$$=\underbrace{[x,x]}_{0}+[x,y]+[y,x]+\underbrace{[y,y]}_{0}$$

$$[x+y,x+y]=[x,y]+[y,x] \quad \dots \text{(II)}$$

من (I) و (II) نجد:

$$[x,y]+[y,x]=0 \Rightarrow [x,y]=-[y,x] \quad *.$$

* تعريف :-

يدعى التطبيق ad_x بتطبيق الاشتقاق الداخلي على جبر لي A .

- سنرمز لمجموعة تطبيقات الاشتقاق الداخلية على جبر لي A بالرمز $Inn(A)$.

* ملاحظة : $Inn(A) \subseteq Der(A)$

العكس ليس ضرورياً صحته.

* نظرية (هامة : سؤال دورة) :-

إن التطبيق : $\Psi : A \longrightarrow Der(A)$ الذي يرفق بكل عنصر x من A بتطبيق الاشتقاق الداخلي ad_x ، هو تشاكل بين جبري لي A و $Der(A)$.

(أي: التطبيق $\Psi: A \longrightarrow Der(A)$ {لاحظ أن المستقر الفعلي لـ Ψ هو $Inn(A)$}

$x \longmapsto ad_x$ هو تشاكل بين جبري لي A و $Der(A)$).

- البرهان :-

ليكن $x, y \in A$ ، $\forall \lambda \in R$ نجد أنه :-

$$ad_{x+y}(z) = [x+y, z] = [x, z] + [y, z]$$
$$= ad_x(z) + ad_y(z)$$

$$= (ad_x + ad_y)(z)$$

وذلك مهما يكن $z \in A$ ، ومنه نستنتج أنه :-

$$ad_{x+y} = ad_x + ad_y$$

$$\Rightarrow \psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$$

- من جهة أخرى لدينا :-

$$ad_{\lambda x}(z) = [\lambda x, z] = \lambda[x, z] = \lambda ad_x(z)$$

$$\Rightarrow ad_{\lambda x} = \lambda ad_x \Rightarrow \psi(\lambda x) = \lambda \psi(x)$$

لنبرهن الآن أنه :-

$$\psi[x, y] = [\psi(x), \psi(y)]$$

باستخدام متطابقة جاكوبي نستطيع أن نكتب :-

$$ad_{[x,y]}(z) = [[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

تفسير :- وذلك لأنه :-

$$[[x, y], z] = -[z, [x, y]]$$
$$= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] \quad \text{حسب جاكوبي}$$
$$= [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

$$ad_{[x,y]}(z) = [x, ad_y(z)] - [y, ad_x(z)]$$

$$= ad_x(ad_y(z)) - ad_y(ad_x(z))$$

$$= (ad_x \circ ad_y - ad_y \circ ad_x)(z)$$

$$\Rightarrow ad_{[x,y]}(z) = [ad_x, ad_y](z)$$

ومنه نجد:

$$\Psi[x,y] = [\Psi(x), \Psi(y)]$$

والتطبيق Ψ هو إذاً تشاكل بين جبري لي A و $Der(A)$. #

يمكن أن تبرهن الخاصة الأخيرة بطريقة ثانية من اليمين .

* * *

انتهت المحاضرة الثانية