المحاضرة الثانية الاثنين 7/10/2013

ملاحظة:

كل عدد حقيقي محدود، أما $\mathbb{R}$ ليست محدودة إلا في $\tilde{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$ الموسعة

تابع في أمثلة الفضاءات المترية:

مثال: فضاء الدوال المستمرة $C[a,b]$

نأخذ X هنا مجموعة كل الدوال الحقيقية $x, y, \dots$ التي هي دوال لمتغير حقيقي مستقل وهي معرّفة ومستمرة على مجال مغلق معطى $[a,b]$ ساحة مغلقة

سنعرف الدالة الحقيقية غير السالبة d بالشكل:

$$d: C[a,b]\times C[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x,y\in C[a,b]: d(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$$

دوال / توابع

سؤال: هل هذا التعريف موجود أم لا؟

إن d تكون موجودة إذا وجد الطرف الأيمن.

نلاحظ الآتي: إن كل من x, y دوال مستمرة ونعلم أن فرق دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة على نفس الساحة المغلقة والمحدودة وبالتالي فإن هذه الدالة الناتجة تبلغ حداً أعلى max وحداً أدنى min في نقطتين على الأقل من ساحة التعريف $[a,b]$

x, y دالتين مستمرتين معرفتين على $[a,b]$ $\longrightarrow$ $x-y$ مستمرة ومعرفة على $[a,b]$ لأن

$$(x-y)(t)=x(t)-y(t)$$

موجود ومعرّف على $[a,b]$ موجود موجود

$sup = Max$ في الساحة المحدودة والمغلقة يكون فيها ملاحظة مهمة

Example: $inf=\min$ $[-1,+1]$ $sup=\max$

أما إذا كانت محدودة وليست مغلقة فليس من الضروري وجود Max ؟

Example: $]-1,+1[$

$inf=-1$ $\quad$ $sup=+1$

min لا يوجد $\quad$ max لا يوجد

$\forall x, y, z \in C[a,b]$: لنتحقق الآن من خواص المسافة:

1) $|x(t)-y(t)| \geq 0 \quad \forall t \in [a,b] \Rightarrow \max\limits_{a\leq t\leq b} |x(t)-y(t)| \geq 0$

$\Leftrightarrow d(x,y) \geq 0$

2) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow \max\limits_{a\leq t\leq b} |x(t)-y(t)| = 0 \Leftrightarrow |x(t)-y(t)| = 0 \quad \forall t$

$\Leftrightarrow x(t)-y(t)=0 \quad \forall t \Leftrightarrow x=y$

3) $d(x,y)=\max\limits_{a\leq t\leq b} |x(t)-y(t)| = \max\limits_{a\leq t\leq b} |y(t)-x(t)| = d(y,x)$

4) $d(x,z)=\max\limits_{a\leq t\leq b} |x(t)-z(t)|$

$=\max\limits_{a\leq t\leq b} |x(t)-y(t)+y(t)+z(t)|$

$\leq \max\limits_{a\leq t\leq b} |x(t)-y(t)| + \max\limits_{a\leq t\leq b} |y(t)-z(t)|$

$\leq d(x,y)+d(y,z)$

وبالتالي $(C[a,b],d)$ يمثل فضاء متري (مترك)

مثال: الفضاء المتري المتقطع:
لتكن لدينا المجموعة X ولنزودها بالدالة:

$$\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto \delta(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

فيكون δ مسافة على X وتدعى δ بالمسافة المتقطعة على X
ويدعى الفضاء (X,δ) بالفضاء المتري المتقطع.
لنتحقق من شروط المسافة:

$\forall x,y,z \in X$:

1) $\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases} \Big\} \rightarrow \delta(x,y) \geq 0$

2) $\delta(x,y) = 0 \iff x = y$ (حسب التعريف)

3) $\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases} = \begin{cases} 0 & y = x \\ 1 & y \neq x \end{cases} = \delta(y,x)$

4) لتكن $x,y,z \in X$ عندئذ نجد ما يلي:
$z = x \Leftarrow$ متراجحة المثلث تكون محققة في جميع الإمكانات الممكنة الوقوع وغير الممكنة الوقوع.
$\delta(x,z) = 1 \Leftarrow x \neq z$
إذا كانت $x = y$ و $y = z$ فإن $\delta(x,y) = 0$ و $\delta(y,z) = 0$ و $x = z$
وهذا ينافي فرض كون $x \neq z$
أما بقية الحالات فهي محققة بملاحظة أن:

$$1 \leq 1 + 0$$
$$\leq 0 + 1$$
$$\leq 1 + 1$$

إذاً δ تحقق متراجحة المثلث

ملاحظة توضيحية

$x \neq z$

- $x \neq z \quad 1 \le \overset{x=y}{0} + \overset{y=z}{0} \Rightarrow x = z$ غير ممكنة
- $x \neq z \quad 1 \le \overset{x\neq y}{1} + \overset{y=z}{0} \Rightarrow x \neq z$ محققة ممكنة
- $x \neq z \quad 1 \le \overset{x=y}{0} + \overset{y\neq z}{1} \Rightarrow x \neq z$ محققة ممكنة
- $x \neq z \quad 1 \le \overset{x\neq y}{1} + \overset{y\neq z}{1} \Rightarrow x \neq z$ محققة ممكنة

$x = z$

- $x = z \quad 0 \le \overset{x=y}{0} + \overset{y=z}{0} \Rightarrow x = z$ محققة
- $x = z \quad 0 \le \overset{x\neq y}{1} + \overset{y=z}{0} \Rightarrow x \neq z$ محققة غير ممكنة
- $x = z \quad 0 \le \overset{x=y}{0} + \overset{y\neq z}{1} \Rightarrow x \neq z$ محققة غير ممكنة
- $x = z \quad 0 \le \overset{x\neq y}{1} + \overset{y\neq z}{1} \Rightarrow x \neq z$ محققة غير ممكنة

مثال: فضاء المتتاليات S:

يتألف هذا الفضاء من مجموعة كل المتتاليات (المحدودة وغير المحدودة)

سنعرف الدالة d بالشكل التالي:

$$\forall x, y \in S: \quad d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}$$

سؤال: هل هذه الدالة موجودة؟

تكون الدالة d موجودة إذا وجدت المتسلسلة في الطرف الأيمن

وتكون المتسلسلة موجودة إذا كانت متقاربة.

إن هذه المتسلسلة متقاربة بملاحظة الآتي:

هذا المقدار أصغر من (1)

$$a_n = \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|} \le \frac{1}{2^n}$$

ولكن $\frac{1}{2^n}$ متقاربة لأنها هندسية أساسها $\frac{1}{2} < 1$

وبالتالي حسب معيار المقارنة فإن الحد العام a_n متقارب وبالتالي فإن المتسلسلة موجودة وهذا بدوره يعني وجود الدالة المفروضة

ملاحظة: حسب معيار المقارنة للمتسلسلات ذات الحدود غير السالبة:

- أصغر من متقاربة متقاربة.

- (موجودة)

ملاحظة: إن ضرب أي عدد بمتسلسلة متقاربة لا يؤثر على تقاربها.