كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق

السنة: الثالثة

المقرر: التحليل العقدي (1)

الفصل: الأول

المحاضرة: (1)

الفصل الأول: حقل الأعداد العقدية

تعريف العدد العقدي: هو كل تركيب من الشكل:

$$z = x + iy \,;\, x, y \in R$$

وهو الشكل الجبري (الديكارتي) للعدد العقدي z، نسمّي x بالجزء الحقيقي $x = Re\,(\,z\,)$ ، بينما تدعى y بالقسم التخيلي $y = Im\,(\,z\,)$ ، ونسمي i بالوحدة التخيلية حيث $i^{\,2} = 1$

وبالتالي تكون مجموعة الأعداد العقدية على الشكل التالي:

$$C = \{\, z = x + iy \,;\, x, y \in R \,\}$$

فإذا كان $Re\,(\,z\,) = 0$ نسمي العدد العقدي عدد تخيلي بحت

وإذا كان $Im\,(\,z\,) = 0$ نسمي العدد العقدي عدد حقيقي بحت

القوى الطبيعية للوحدة التخيلية i :

نلاحظ أن :

$$i^0 = 1 \,, i^1 = i \,, i^2 = -1 \,, i^3 = -i \,, i^4 = 1 \,, i^5 = i \,, i^6 = -1 \,, i^7 = -i, \ldots$$

وبالتالي نجد ما يلي:

$$\forall\, n \in N + \begin{cases} i^{4n} = 1 \\ i^{4n+1} = i \\ i^{4n+2} = -1 \\ i^{4n+3} = -i \end{cases}$$

مثال: $i^{2001} = i \,,\; i^{16} = 1 \,,\; i^{19} = -i$

تساوي عددين عقديين:

بفرض $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين عقديين فإن :

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

الجمع والضرب في مجموعة الأعداد العقدية C :

بفرض $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين عقديين عندئذٍ نعرف الضرب والجمع في C كما يلي :

$$z_1 + z_2 = (x_1 x_2) + i(y_1 y_2)$$

$$z_1 . z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

مثال:

$$(2 + 3i) + (4 - i) = 6 + 2i$$

$$(7 - 3i).(2 + 15i) = 59 + 99i$$

$$(1 + i)^2 = -2i$$

$$(1 + i)^8 = (2i)^4 = 16 \rightarrow [\ \{ (1 + i)^2 \}^4 = (2i)^4 = 16]$$

$$(1 + i).(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i) = 1$$

خواص الجمع والضرب في C :

نلاحظ أن الجمع في C تبديلي وتجميعي ويقبل العدد العقدي $O = 0 + 0i$ عنصر حيادي بالنسبة لعملية الجمع ولكل عدد عقدي $z = x + iy$ نظير بالنسبة للجمع و هو

$-z = -x - iy$ وبالتالي $(C, +)$ تشكل زمرة تبديلية.

كذلك الضرب في C تبديلي وتجميعي ويقبل العدد العقدي $1 = 1 + 0i$ عنصر حيادي بالنسبة للضرب ولكل عدد عقدي $z = x + iy \neq 0$ نظير بالنسبة للضرب هو

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

وبالتالي $(C^*, .)$ زمرة تبديلية، كذلك الضرب توزيعي على الجمع في C أي :

$$\forall\, z_1, z_2, z_3 \in C : \; z_1.(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

كما أن C لا يحوي قواسم للصفر.

القسمة في C :

بفرض $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين عقديين بحيث $z_2 \neq 0$ عندئذ نعرف القسمة في C كما يلي :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + y_2)(x_2 - iy_2)} \quad = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2}\right) + i\left(\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)$$

مثال : $\dfrac{1+i}{2+3i} = \dfrac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{5}{13} + \dfrac{-1}{13}i$

مثال : بفرض $z = 3 - 4i$ أوجد مقلوب العدد z :

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3 - 4i} = \frac{(3 + 4i).1}{(3 - 4i).(2 - 3i)} = \frac{3 + 4i}{9 + 16} = \frac{3 + 4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

انتهت المحاضرة