كلية العلوم قسم الرياضيات - جامعة دمشق		السنة : الثالثة

المقرر : البنى الجبرية (3)		الفصل : الأول

المحاضرة : (3)		التاريخ : 2013/10/01

التشاكلات المودولية

تعريف : ليكن M, N مودولين على حلقة R , نعرف التشاكل المودولي بأنه تطبيق :

$f: M \longrightarrow N$ يحقق :

$1)\ f(x+y) = f(x) + f(y) \quad ; \forall x, y \in M$

$2)\ f(\beta . x) = \beta . f(x) \quad ; \quad \forall x \in M \ , \beta \in R$

ويمكن دمج الشرطين بشرط واحد :

$$f(\beta . x + y) = \beta . f(x) + f(y) \ ; \ \forall x, y \in M \ , \beta \in R$$

إذا كان $f: M \longrightarrow N$ تشاكل مودولي و $X \subseteq M$, $Y \subseteq N$ فإن :

الصورة المباشرة لـ X : $\vec{f}(X) = \{ f(x) ; \ x \in X \}$

الصورة العكسية لـ Y : $\overleftarrow{f}(x) = \{ x \in M \ ; \ f(x) \in Y \}$

نواة f $\quad ker\, f = \{ x \in M \ ; \ f(x) = 0_N \} = \overleftarrow{f}(0) = \overleftarrow{f}(\{(0)\})$

عند كتابة $\overleftarrow{f}(0)$ نقصد بها $\overleftarrow{f}(\{(0)\})$ يجب أن تكون مجموعة .

وبسهولة ومن نظرية الزمر إذا كان : $f: M \longrightarrow N$ تشاكل مودولي فإن :

$1)\ f(0_M) = 0_N$

$2)\ f(-x) = -f(x)$

$3)\ ker(f) = 0 \ \Leftrightarrow$ متباين f

ونرمز لمجموعة كل التشاكلات المودولية التي منطلقها M ومستقرها N بالرمز $Hom_R(M, N)$

وبسهولة أيضا يمكننا إثبات المبرهنة التالية .

مبرهنة :

إذا كان $f,g \in Hom_R(M,N)$ و $h \in Hom_R(N,P)$ فإن :

1) $hof \in Hom_R(M,P)$

2) $f+g \in Hom_R(M,N)$

3) f متباين و h متباين $\Longrightarrow hof$ متباين

4) f غامر و h غامر $\Longrightarrow hof$ غامر

5) hof غامر $\Longrightarrow h$ غامر

6) hof متباين $\Longrightarrow f$ متباين

مبرهنة $(1-2)$:

إذا كان $f \in Hom_R(M,N)$ وكان A مودولا جزئيا من M و B مودولا جزئيا من N فإن :

1ـ $\vec{f}(A)$ مودول جزئي من N .

2ـ $\overleftarrow{f}(B)$ مودول جزئي من M .

3ـ $\overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) = A + kerf$

4ـ $\vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right) = B \cap Imf$

ملاحظة : بالنسبة لـ 3 إذا كان $kerf \subseteq A$ فإن $\overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) = A$

الإثبات :

1ـ $\vec{f}(A) \subseteq N$ تعريفا , كما أن $0_N = f(0_M) \in \vec{f}(A)$ أي أن $\emptyset \neq \vec{f}(A) \subseteq N$

من جهة ثانية $\forall\, y_1, y_2 \in \vec{f}(A)\ ,\ \beta \in R$ فإن :

$$y_i = f(x_i) \quad ; \quad x_i \in A \ ; \ i = 1,2$$

$$\beta . y_1 + y_2 = \beta . f(x_1) + f(x_2) = f\left(\overbrace{\beta . x_1 + x_2}^{\in A}\right) \in \vec{f}(A)$$

لأن A مودول جزئي وبالتالي $\vec{f}(A)$ مودول جزئي من N .

2ـ $\overleftarrow{f}(B) \subseteq M$ تعريفاً , $0_M \in \overleftarrow{f}(B)$ لأن $f(0_M) = 0_N \in B$ إذاً $\emptyset \neq \overleftarrow{f}(B) \subseteq M$

من جهة ثانية $\forall\, x_1, x_2 \in \overleftarrow{f}(B) \;,\; \beta \in R$ عندئذٍ :

$$f(x_i) \in B \quad ; \quad i = 1,2$$

وبالتالي يكون : $f(\beta.x_1 + x_2) = [\beta.f(x_1) + f(x_2)] \in B$

أي : $(\beta.x_1 + x_2) \in \overleftarrow{f}(B)$ وبالتالي يكون $\overleftarrow{f}(B)$ مودول جزئي من M .

3ـ أياً كان $x \in \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right)$ فإن $f(x) \in \vec{f}(A)$

ومنه يوجد $a \in A$ بحيث $f(x) = f(a)$

$$\Rightarrow f(x) - f(a) = 0 \Rightarrow f(x-a) = 0 \Rightarrow (x-a) \in ker(f)$$

وبالتالي يوجد $b \in ker(f)$ بحيث $x - a = b$ ومنه

$$x = a + b \;;\; x \in A \;\;\wedge\;\; b \in ker(f)$$

وهذا يبين أن $x \in A + ker(f)$ إذاً : $\overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) \subseteq A + kerf \quad \ldots \quad (\mathrm{I})$

ومن ناحية أخرى : أياً كان $t \in A + kerf$ فإن :

$$t = a + b \;;\; a \in A \;\;\wedge\;\; b \in kerf$$

$$\Rightarrow f(t) = f(a+b) = f(a) + \overbrace{f(b)}^{\in \ker(f)} \Rightarrow f(a) = f(t)$$

$$\Rightarrow f(t) \in \vec{f}(A) \Rightarrow t \in \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) \Rightarrow A + kerf \subseteq \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) \ldots \;(\mathrm{II})$$

من $\mathrm{I}\,,\mathrm{II}$ نجد أن :

$$\overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) = A + kerf$$ وهو المطلوب

4ـ $\begin{cases} \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right) \subseteq B \\ \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right) \subseteq Imf \end{cases} \Longleftarrow \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right) \subseteq B \cap Imf \ \ldots (\mathrm{I}')$

من جهة أخرى : أيا كان $z \in B \cap Imf$ فإن : $z \in Imf \quad \wedge \quad z \in B$

نفرض أن $x \in M \ ; \ z = f(x)$

$$\Longrightarrow f(x) \in B \Longrightarrow x \in \overleftarrow{f}(B) \Longrightarrow f(x) \in \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(x)\right)$$

أي : $z \in \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(x)\right)$ ومنه يكون $B \cap Imf \subseteq \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(x)\right) \ \ldots (\mathrm{II}')$

من $\mathrm{I}' , \mathrm{II}'$ نجد أن : $\vec{f}\left(\overleftarrow{f}(x)\right) = B \cap Imf$ وهو المطلوب

نتائج من المبرهنة :

إذا كان $f \in Hom_R(M,N)$ فإن :

1ـ $kerf$ مودول جزئي من M .

$[kerf = \overleftarrow{f}(0)]$ صورة عكسية لمودول جزئي $\{0\}$

2ـ Imf مودول جزئي من N .

لأن $Imf = \vec{f}(M)$ صورة مباشرة لمودول جزئي M من نفسه .

3ـ $\overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) = A$ إذا كان $kerf \subseteq A$.

تعريف : نقول عن مودولين M, N أنهما متماثلان ونكتب $M \cong N$ إذا وجد تماثل مودولي بينهما

أي إذا وجد تشاكل مودولي غامر ومتباين .

... انتهت المحاضرة الثالثة ...