الشكل المثلثّي للعدد العقدي :

بفرض $z = x + iy$ عدد عقدي غير معدوم وليكن $\overrightarrow{OM}$ الشعاع الممثل لـ z في المستوي العقدي عندئذٍ نرمز لطول الشعاع $\overrightarrow{OM}$ بـ (r) حيث $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ونرمز للزاوية المحصورة بين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{Ox}$ بـ θ حيث تسمى زاوية العدد العقدي z.

عندئذٍ نسمّي $z = r\ Cis\ \theta$ بالشكل المثلثّي للعدد z حيث يكون :

$$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta\ \ , r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arg(z)$$

وبالتالي يمكن كتابة الشكل المثلثّي للعدد z كما يلي:

$$z = r\ cis\ \theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

من المعلوم أن لـ θ عدد غير منتهٍ من القياسات ولكن في دراستنا سوف نهتم بالقيمة الرئيسية θ_0 وهي القيمة المحصورة في المجال $[0,2\pi[$ ونكتب : $\theta_0 = Arg\ (z)$

أي القيمة الرئيسية لزاوية العدد العقدي z المحصورة في المجال $[0,2\pi[$ ومنه يمكن تعريف التابع :

$$Arg : C \longrightarrow [\,0,2\pi\,[$$
$$z \longrightarrow Arg\ (z) = \theta_0$$

بينما نعرف العلاقة :

$$arg : C \longrightarrow R$$
$$z \longrightarrow \arg(z) = \theta$$

حيث نسمي arg بتابع متعدد القيم.

تمرين : اكتب الأعداد العقدية التالية بالشكل المثلثي (القيمة الرئيسية) ثم مثّل الأعداد هندسيّاً في مستوي غاوس (المستوي العقدي):

1) $z_1 = 1 + i \qquad x = 1 \quad \wedge \quad y = 1$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \; ; k \in \mathbb{Z} \Leftarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

نجعل $k = 0$ لأننا نعمل ضمن القيمة الرئيسية

$$\Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\, cis\, \frac{\pi}{4}$$

2) $z_2 = 2 + 2i$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \; ; k \in \mathbb{Z} \Leftarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

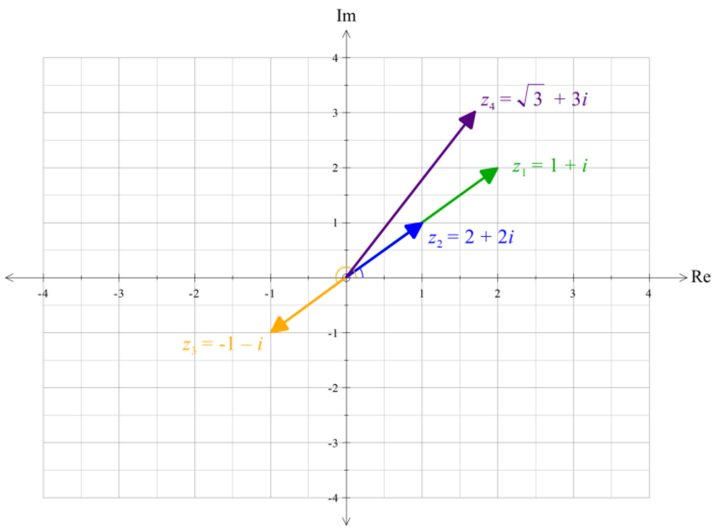
$$\Rightarrow z_2 = 2\sqrt{2}\, cis\, \frac{\pi}{4}$$

3) $z_3 = -1 - i$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \; ; k \in \mathbb{Z} \Leftarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_3 = \sqrt{2}\, cis\, \frac{5\pi}{4}$$



4) $z_4 = \sqrt{3} + 3i$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3 + 9} = 2\sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \; ; k \in \mathbb{Z} \Leftarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_4 = 2\sqrt{3}\; cis\; \frac{\pi}{3}$$

5) $z_5 = \sqrt{3} - i$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\theta = \frac{-\pi}{6} + 2\pi k \; ; k \in \mathbb{Z} \Leftarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_5 = 2\; cis\; \frac{11\pi}{6}$$

أضفنا 2π إلى الزاوية $\frac{\pi}{6}$ لتصبح ضمن المجال $[0,2\pi[$

6) $z_6 = 3 = 3\; cis\; 0$

7) $z_7 = -2i = 2\; cis\; \frac{3\pi}{2}$

تساوي عددين عقديين بالشكل المثلثي:

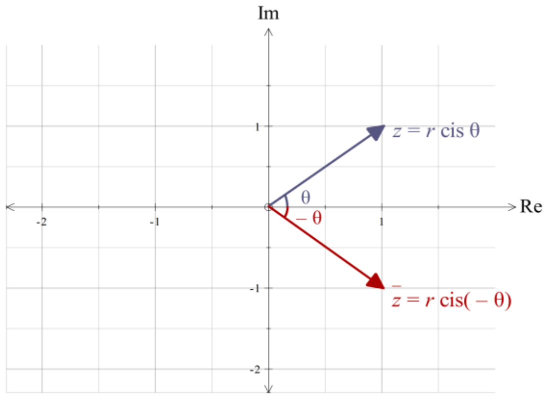
بفرض $z_1 = r_1\, cis\theta_1 \;\wedge\; z_2 = r_2\, cis\theta_2$ عددان عقديان ،عندئذٍ:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2\pi k \,;\, k \in \mathbb{Z}$$

مرافق عدد عقدي بالشكل المثلثي:

نفرض $z = r\, cis\; \theta$ عدد عقدي عندئذٍ:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= r(\cos\theta - i\sin\theta)\\ &= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))\\ &= r\; cis(-\theta)\end{aligned}$$



الضرب و القسمة بالشكل المثلثي:

بفرض $z_1 = r_1\, cis\theta_1 \;\wedge\; z_2 = r_2\, cis\theta_2$ عددان عقديان ،عندئذٍ:

$$z_1 . z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1). r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 . r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$= r_1 . r_2\; cis(\theta_1 + \theta_2)$$

وبنفس الطريقة إذا كان $z_2 \neq 0$ يكون:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\; cis(\theta_1 + \theta_2)$$

ومنه بفرض $z = r\; cis\; \theta$ عدد عقدي لا يساوي الصفر يكون قانون المقلوب كالآتي:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} = cis\;(-\theta)$$

القوى الطبيعية للأعداد العقدية بالشكل المثلثي:

بفرض $z = r\ cis\ \theta$ عدد عقدي عندئذٍ:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : (cis\ \theta\ )^n = cis\ (n\theta)$$

قانون دوموافر

تمرين [نموذج امتحاني]:

اكتب بالشكل المثلثي القيمة الرئيسية للعدد العقدي $z = \left(\frac{\sqrt{3}+3i}{1+i}\right)^4$ ثم اكتبه بالشكل الديكارتي.

الحل : $z = \left(\frac{\sqrt{3}+3i}{1+i}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{12}\ cis\frac{\pi}{8}}{\sqrt{2}\ cis\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \left(\sqrt{6}\ cis\ \frac{\pi}{12}\right)^4 = 36\ cis\ \frac{\pi}{3}$

$$= 36\ \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 18 + 18\sqrt{3}i$$

تمرين: أعد حل التمرين السابق من أجل $z = \left(\frac{1+i}{-1+\sqrt{3}i}\right)^{20}$

$$z = \left(\frac{1+i}{-1+\sqrt{3}i}\right)^{20} = \left(\frac{\sqrt{2}\ cis\frac{\pi}{4}}{2\ cis\frac{2\pi}{3}}\right)^{20} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}\ \left[cis\ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)\right]^{20}$$

$$= \frac{1}{2^{10}}\left[cis - \frac{5\pi}{12}\right]^{20} = \frac{1}{2^{10}}cis - \frac{50\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{1024}\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right] = \frac{1}{1024}\left(\frac{1}{2} + i\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2048} + i\frac{-\sqrt{3}}{2048}$$

جذر عدد عقدي:

بفرض z عدد عقدي و $n \in \mathbb{N}$ عندئذٍ نقول عن العدد العقدي w أنّه جذر تربيعي من المرتبة n للعدد z اذا وفقط اذا كان $w^n = z$

تمرين: أوجد الجذور التكعيبية للعدد العقدي $z = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\, i$:

لإيجاد الجذر للعدد العقدي نتبع الخوارزمية التالية:

- نكتب z بالشكل المثلثي $z = 8\; cis\; \frac{\pi}{4}$
- نفرض أن $w = r\; cis\; \theta$ جذر تكعيبي لـ z فيكون:

$$w^3 = z \Longrightarrow (r\; cis\; \theta)^3 = 8\; cis\; \frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow r^3 cis\; 3\theta = 8\; cis\; \frac{\pi}{4}$$

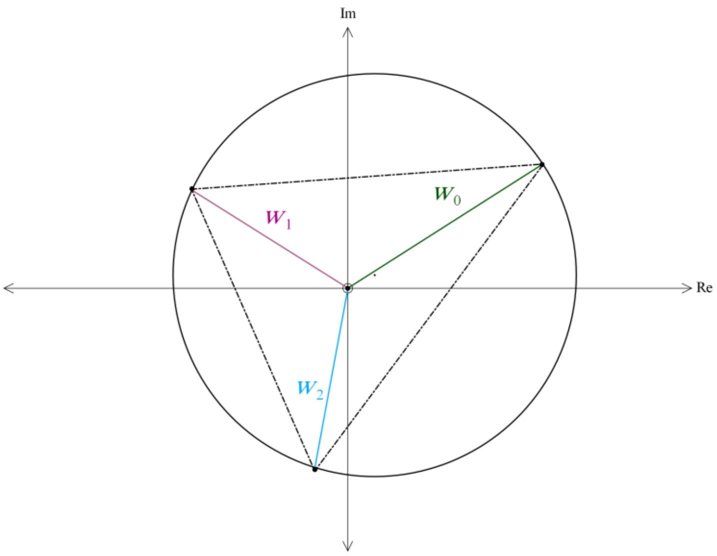
$$\Longrightarrow r^3 = 8 \Longrightarrow r = 2$$

$$3\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k\;\; ; k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} k\;\; ; k = 0,1,2$$

$$k = 0 \;\Longrightarrow w_0 = 2\; cis\; \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\, i$$

$$k = 1 \Longrightarrow w_1 = 2\; cis\; \frac{9\pi}{12} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$$

$$k = 2 \Longrightarrow w_2 = 2\; cis\; \frac{17\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\, i$$



... انتهت المحاضرة (3) ...