كلية العلوم قسم الرياضيات - جامعة دمشق

السنة : الثانية

المقرر : التحليل (3)

الفصل : الأول

المحاضرة : (3)

التاريخ : 2013/10/7

المتسلسلات المتناوبة

تعريف :

يقال عن متسلسلة أنها متناوبة إذا وفقط إذا كانت إشارات حدودها تتناوب بأحد الشكلين الآتيين :

$$\begin{cases} -, +, -, +, \dots \dots \\ +, -, +, -, \dots \dots \end{cases}$$

اختبار ليبنز :

- لتكن

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

متسلسلة بحيث يتحقق ما يلي :

1) - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متناوبة .

2) - حدود هذه المتسلسلة تتناقص بالقيمة المطلقة أي أن :

$$|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \cdots$$

3) - أن تكون نهاية الحد العام للمتسلسلة تسعى نحو الصفر عندما $n \to \infty$

عندئذٍ : تكون هذه المتسلسلة متقاربة ..

مثال :

ادرس المتسلسلة التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

الحل :

هذه المتسلسلة متناوبة .

وأيضاً : $\left|\frac{-1}{1}\right| \geq \left|\frac{+1}{2}\right| \geq \left|\frac{-1}{3}\right| \geq \cdots$

وأيضاً : $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\frac{1}{n}\times(-1)^n=0$

لا متناهي بالصغر   محدود

ومنه تكون المتسلسلة متقاربة حسب اختبار ليبنز .

العمليات على المتسلسلات :

1) ـ الجمع :

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ & $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين ..

عندئذٍ نقوم بالمقارنة التالية :

إذا كانت المتسلسلتين تبدآن من نفس القيمة وهنا القيمة هي (n=1) نجمع كما يلي :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$

ملاحظة هامة :

إذا كانت المتسلسلتين تبدآن من قيمتان مختلفتان ننظر للحد الأصغر ومن ثم نكمل الجمع حتى بلوغ الحد الأكبر كما يلي :

$$\sum_{n=5}^{\infty} x_n+\sum_{n=2}^{\infty} y_n$$

الحد الأكبر (n=5)   الحد الأصغر(n=2)

$$\sum_{n=5}^{\infty} x_n+y_2+y_3+y_4+\sum_{n=5}^{\infty} y_n=y_2+y_3+y_4+\sum_{n=5}^{\infty}(x_n+y_n)$$

2) ـ الطرح :

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ & $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين ..

عندئذٍ : إذا كانت المتسلسلتين تبدآن من نفس القيمة و هنا القيمة هي (n=1) نطرح كما يلي :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$$

ملاحظة هامة :

إذا كانت المتسلسلتين تبدآن من قيمتان مختلفتان ننظر للحد الأصغر ومن ثم نكمل الطرح حتى بلوغ الحد الأكبر كما يلي :

$$\sum_{n=5}^{\infty} x_n - \sum_{n=2}^{\infty} y_n$$

الحد الأكبر (n=5)　　　　الحد الأصغر(n=2)

$$\sum_{n=5}^{\infty} x_n - \left(y_2 + y_3 + y_4 + \sum_{n=5}^{\infty} y_n\right) = +(-y_2) + (-y_3) + (-y_4) + \sum_{n=5}^{\infty} (x_n - y_n)$$

3) ـ الضرب (بعدد) :

$$\propto \times \sum_{n=5}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\propto \times a_n)$$

(حيث ∝ عدد)

نتيجة :

1. إذا ضربنا متسلسلة متقاربة (مجموعها S) ولتكن

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

بعدد مغاير للصفر مثل ∝ فإن المتسلسلة الناتجة تكون متقاربة ومجموعها ($\propto \times S$) .

2. إذا ضربنا متسلسلة متباعدة ولتكن

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

بعدد مغاير للصفر مثل ∝ فإن المتسلسلة الناتجة تكون متباعدة .

ملاحظة :

<< الضرب بعدد مغاير للصفر لا يغير نوع المتسلسلة >>

مثال :

ادرس المتسلسلة التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3}{n}$$

الحل :

هذه المتسلسلة متباعدة لأنها تنتج من المتسلسلة التوافقية المتباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

بضربها بالعدد (3-) المغاير للصفر .

المتسلسلات الهندسية :

تعريف :

المتسلسلة الهندسية هي متسلسلة من الشكل التالي :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\,.r^n = a + a.r + a.r^2 + \cdots + a.r^n + \cdots$$

حيث : a هو الحد الأول , r هو الأساس

مثال :

لتكن $a = 2\,,\ r = \frac{1}{3}$

ومنه المتسلسلة هي :

$$2 + \frac{2}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots$$

ملاحظة : كل حد من حدود المتسلسلة الهندسية ينتج عن سابقه بضربه بالأساس r

وبشكل عكسي يتم السؤال :

لتكن المتسلسلة :

$$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots$$

هل هي هندسية ؟

((ولبيان ذلك نقوم بضرب كل حد بمقلوب سابقه فإذا تساوت النتائج كانت المتسلسلة هندسية))

نتيجة :

الشرط اللازم والكافي لتكون المتسلسلة الهندسية متقاربة هو أن تكون القيمة المطلقة لأساسها أصغر تماماً من الواحد (1) .

حساب مجموع المتسلسلات الهندسية المتقاربة :

تذكير : متتالية المجاميع الجزئية S_n هي مجموع أول n حد بالمتسلسلة لذلك تم الجمع من صفر حتى n-1

لتكن : $\sum_{n=0}^{\infty} a\,.\,r^n$ متسلسلة هندسية متقاربة ولنأخذ :

$$S_n = a + \cancel{a.r} + \cancel{a.r^2} + \cancel{\cdots} + \cancel{a.r^{n-1}}$$

نضرب الطرفين بالأس r ونطرح :

$$-$$

$$r.S_n = \cancel{a.r} + \cancel{a.r^2} + \cancel{a.r^3} + \cancel{\cdots} + a.r^n$$

$$(1-r).S_n = a - a\,.\,r^n$$

وباعتبارأن: $(1-r)\neq 0$ نقسم ,, وبالتالي :

$$S_n=\frac{a.(1-r^n)}{(1-r)} \Longrightarrow S_n=\frac{a}{1-r}-\frac{a}{1-r}\times r^n$$

وبما أن : $|r|<1 \Longleftarrow r^n \longrightarrow 0$ وبالتالي :

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \times 0 \Rightarrow S = \frac{a}{1-r} \leftrightarrow \text{المجموع} = \frac{\text{الحد الأول}}{1 - \text{الأساس}}$$

مثال (1):

ادرس المتسلسلة التالية واحسب مجموعها في حال كانت متقاربة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

الحل :

هذه المتسلسلة هندسية وحدها الأول هو : $a = -\frac{1}{4}$ وأساسها هو : $r = -\frac{1}{4}$

ومنه :

$$|r| = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \text{متقاربة}$$

ومجموعها :

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{5}$$

مثال (2) :

أوجد المجموع التالي :

$$2 + 6 + 18 + 54$$

الحل :

نلاحظ أن الأساس هنا هو (3) لأن كل حد ينتج عن سابقه بضربه بـ (3) وبالتالي نكتب :

$$\sum = 2 + 6 + 18 + 54$$

نضرب الطرفين بالأساس (3) ونطرح المعادلتين :

$$3 \times \sum = 6 + 18 + 54 + 162$$

$$-2 \times \sum = -160 \Rightarrow \sum = 80$$

مثال (3) :

ادرس المتسلسلتين الآتيتين وأوجد المجموع في حال التقارب :

1) -

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^n$$

2) -

$$\sum_{n=10}^{\infty} (-2) \times \left(-\frac{3}{5}\right)^n$$

الحل :

1) - متسلسلة هندسية حدها الأول هو : $a = e^2$ وأساسها $r = e$

وبما أن :

$|r| = \mathrm{e} \approx 2.7 > 1 \implies$ متباعدة

2) - متسلسلة هندسية حدها الأول هو : $(-2) \times \left(-\frac{3}{5}\right)^{10}$ وأساسها هو : $-\frac{3}{5}$

وبما أن :

$|r| = \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5} < 1 \implies$ متقاربة

ومجموعها هو :

$$S = \frac{(-2) \times \left(-\frac{3}{5}\right)^{10}}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{-2 \times \frac{3^{10}}{5^{10}}}{\frac{8}{5}} = -2 \times \frac{3^{10}}{5^{10}} \times \frac{5}{8} = -\frac{3^{10}}{4 \times 5^9}$$

تعريف :

يقال عن التكامل المحدد التالي :

$$I = \int_{a}^{+\infty} f(x) \,.\, dx$$

حيث أن : (a عدد) ; $a \in \mathcal{R}$

أنه نوع من أنواع التكاملات المعتلة , وإذا كانت النهاية :

$$I = \int_{a}^{+\infty} f(x) . dx = \lim_{b \longrightarrow +\infty} \int_{a}^{b} f(x). dx$$

هي نهاية موجودة ومحدودة .. فعندئذٍ نقول عن هذا التكامل أنه متقارب وقيمته هي قيمة هذه النهاية .

وفي الحالة المعاكسة يقال عن هذا التكامل أنه متباعد .

<< التكامل المتقارب له قيمة بينما التكامل المتباعد ليس له قيمة >>

ملاحظة :

التابع المستمر هو تابع يقبل المكاملة .

.... " انتهت المحاضرة "