كلية العلوم قسم الرياضيات ـ جامعة دمشق　　　　السنة : الثالثة

المقرر : البنى الجبرية (3)　　　　الفصل : الأول

المحاضرة : (1)　　　　التاريخ : 2013/09/24

المودولات والمودولات الجزئية

تعريف : لتكن $M \neq \emptyset$ مجموعة غير خالية , R حلقة ولنزود M بقانوني تشكيل الأول داخلي $(+)$:

$$+ : M \times M \longrightarrow M$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

والثاني خارجي $(\cdot)$ مجموعة مؤثراته الحلقة R :

$$\cdot : R \times M \longrightarrow M$$

$$(\alpha, x) \mapsto \alpha . x$$

نقول عن M إنه مودول يساري على R إذا تحقق :

1ـ البنية $(M, +)$ زمرة تبديلية .

2ـ أيا كان $x, y \in M$ و $\alpha, \beta \in R$ فإن :

1) $1_R . x = x$

2) $\alpha . (x + y) = \alpha . x + \alpha . y$

3) $(\alpha + \beta) . x = \alpha . x + \beta . x$

4) $(\alpha . \beta) . x = \alpha . (\beta . x)$

وبالمثل يمكن تعريف المودول اليميني على الحلقة بأنه مجموعة غير خالية M' مزودة بقانوني تشكيل

الأول داخلي $(+)$:

$$+ : M' \times M' \longrightarrow M'$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

والثاني خارجي $(\cdot)$ مجموعة مؤثراته الحلقة R :

$$\cdot : M' \times R \longrightarrow M'$$

$$(x, \alpha) \mapsto x . \alpha$$

ويكون $(M',+)$ زمرة تبديلية , وأيا كان $x,y \in M'$ و $\alpha,\beta \in R$ فإن :

1) $x.1_R = x$

2) $(x+y).\alpha = x.\alpha + y.\alpha$

3) $x.(\alpha+\beta) = x.\alpha + x.\beta$

4) $x.(\alpha.\beta) = (x.\alpha).\beta$

ودراسة المودولات اليمينية تماما كدراسة المودولات اليسارية , لذلك سندرس المودولات اليسارية وفيما سيأتي سنقصد بكلمة مودول مودولا يساريا وبسهولة نبرهن القضايا التالية :

1) $0_R.x = 0_M$; o_R صفر الحلقة

2) $\alpha.0_M = 0_M$; 0_M صفر المودول

3) $(-\alpha).x = \alpha.(-x) = -(\alpha.x)$

وذلك أيا كان $x \in M$, $\alpha \in R$

أما الاقتضاء التالي :

$$\alpha.x = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \quad \overset{\text{أو}}{\vee} \quad x = 0$$

صحيح في الفضاءات الشعاعية لكنه غير صحيح في المودولات .

الإثبات : (في الفضاءات الشعاعية) أيا كان $\alpha \in F$, $x \in V$ فإن :

إذا كان $\alpha = 0$ يتم المطلوب , الاقتضاء صحيح

أما إذا كان $0 \neq \alpha \in F$ فإن $\alpha^{-1} \in F$ عندئذٍ يكون :

$$\alpha.x = 0 \Longrightarrow \alpha^{-1}.(\alpha.x) = 0 \underset{\text{الفضاء}}{\overset{\text{تعريف}}{\Longrightarrow}} 1_F.x = 0 \underset{\text{الفضاء}}{\overset{\text{تعريف}}{\Longrightarrow}} x = 0$$

وهذا الإثبات لا يمكن أن يتم إلا بوجود α^{-1} وهذا غير متاح في الحلقة دوما .

أمثلة :

1ـ كل فضاء شعاعي V على حقل F هو مودول على الحلقة F .

2ـ لتكن R حلقة ما , وليكن n عدد صحيح موجب ولنأخذ المجموعة :

$$R^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n); a_i \in R\}$$

ولنزود هذه المجموعة بقانوني تشكيل :

داخلي $(+): (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$

خارجي $(\cdot): \alpha.(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha.a_1, \alpha.a_2, \dots, \alpha.a_n)$ مجموعة مؤثراته R

بسهولة نجد أن R^n مودول على R .

حالة خاصة : إذا كان $n = 1$ نجد أن كل حلقة هي مودول على نفسها .

نتائج :
- من أي حلقة يمكن أن نبني مودول .
- الجداء الديكارتي لأي حلقة هو مودول .
- F^n فضاء على F بعده n .
- $\mathbb{C}^n$ فضاء على $\mathbb{C}$ بعده n .
- $\mathbb{C}^2$ فضاء على $\mathbb{C}$ بعده n .
- $\mathbb{C}$ فضاء بعده على $\mathbb{R}$ هو 2 .

لأن $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ (يماثل $\mathbb{R}^2$) , لا يمكن إيجاد عنصر من $\mathbb{R}$ يولد $\mathbb{C}$ والقاعدة القانونية لتوليد $\mathbb{C}$ هي $\{1, i\}$

3ـ لتكن $(G, +)$ زمرة جمعية تبديلية فيكون G مودول على $\mathbb{Z}$

$$n.a = \begin{cases} \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ مرة}} & ; \ n > 0 \\ e & ; n = 0 \\ \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{(-n) \text{مرة}} & ; \ n > 0 \end{cases}$$

حيث هنا عملية المضاعف في $\mathbb{Z}$ هي قانون التشكيل الخارجي عندئذٍ نحقق شروط المودول أي أن كل زمرة جمعية تبديلية هي مودول على الحلقة $\mathbb{Z}$ لأن المضاعف معرف على $\mathbb{Z}$ حيث $n \in \mathbb{Z}$.

ملاحظة :

$$(n+m).a = n.a + m.a$$

$$n.(a+b) = n.a + n.b$$

وبحالة خاصة :

الزمرة الدوارة $G =< a >$ هي مودول على $\mathbb{Z}$.

زمرة دوارة منتهية $G =< a >_n = \{a, a^2, a^3, \dots, a^n = e\}$

$$=< a >_\infty = \{\dots, a^{-1}, a^0, a, a^2, \dots\}$$

ملاحظة :

رتبة عنصر هي أصغر عدد صحيح موجب من أجله يكون $a^m = e$ ونرمزله بـ $0(a)$

... انتهت المحاضرة الأولى ...