

ثانياً : طريقة القواطع :

ليكن $f(x)$ تابع مستمر على المجال $[a, b]$ حيث $f(a) \cdot f(b) < 0$ ولنفرض أن $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ وليكن α جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a, b]$ نوصل بين النقطتين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ بقطعة مستقيمة فتقطع المجال $[a, b]$ بنقطة ولتكن x_1 ثم نحسب $f(x_1)$ ونميز الحالات :

$$\alpha \in [a, x_1] : f(x_1) > 0 \quad \diamond$$

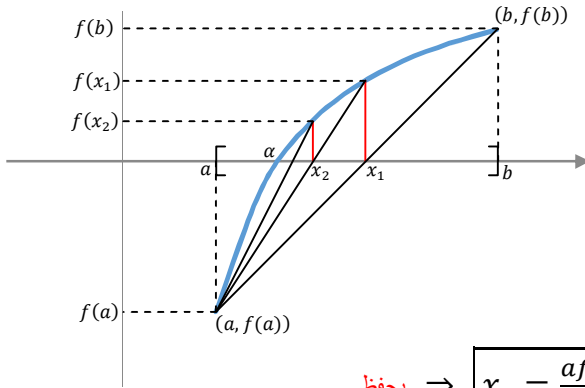
$$\alpha \in [x_1, b] : f(x_1) < 0 \quad \diamond$$

$$\alpha = x_1 : f(x_1) = 0 \quad \diamond \text{ (وهي حالة نادرة)}$$

نكرر هذه العملية عدة مرات (إلا في حال $f(x_1) = 0$) حتى نحصل على جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = 0$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \text{ المعادلة العامة للمستقيم من الشكل}$$

نلاحظ أن معادلة المستقيم الواصل بين النقطتين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ هي على الشكل :



$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$$

كذلك نقطة تقاطع هذا المستقيم مع \overline{OX} تتحدد بوضع

$y = 0$ ولتكن x_1 فاصلة نقطة التقاطع فيكون :

$$\frac{0-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x_1-a}{b-a} \Rightarrow x_1 = a - \frac{f(a) \cdot (b-a)}{f(b)-f(a)}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}} \quad \text{((قانون القواطع))} \Rightarrow \text{يحفظ}$$

تقدير الخطأ بطريقة القواطع :

بفرض ε الدقة المطلوبة عندئذ نتوقف عن تكرار القانون السابق بعد n مرة إذا كان $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

مثال :

باستخدام طريقة القواطع أوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = 3x^3 - 5x - 7 = 0$ في المجال $[1, 2]$ بدقة $\varepsilon = 0.05$

الحل : نلاحظ أن :

$$f(a) = f(1) = -9 < 0 \quad , \quad f(b) = f(2) = 7 > 0$$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[1,2]$ وليكن α نطبق قانون القواطع

$$x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{1(7)-2(-9)}{7-(-9)} = 1.5625 \Rightarrow f(x_1) = -3.3684 < 0 \Rightarrow \alpha \in [1.5625, 2]$$

$$x_2 = 1.7046 \Rightarrow f(x_2) = -0.664 < 0 \Rightarrow \alpha \in [1.7046, 2]$$

$$x_3 = 1.7302 \Rightarrow f(x_3) = -0.1125 < 0 \Rightarrow \alpha \in [1.7302, 2]$$

$$x_4 = 1.7345 \Rightarrow f(x_4) = -0.0178 < 0 \Rightarrow \alpha \in [1.7345, 2]$$

$$|x_4 - x_3| = 0.0255 < \varepsilon \Rightarrow \alpha \approx x_3 = 1.7302$$

مثال :

باستخدام طريقة القواطع أوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = 3x + \sin x - e^x = 0$ في المجال $[1,2]$
بدقة $\varepsilon = 0.02$

الحل : نلاحظ أن :

$$f(a) = f(1) = 1.1232 > 0 \quad , \quad f(b) = f(2) = -0.4797 < 0$$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[1,2]$ وليكن α نطبق قانون القواطع

$$x_1 = \frac{1(-0.4794)-2(1.1232)}{-0.4794-(1.1232)} = 1.7008 \Rightarrow f(x_1) = 0.6156 > 0 \Rightarrow \alpha \in [1.7008, 2]$$

$$x_2 = 1.869 \Rightarrow f(x_2) = 0.081 > 0 \Rightarrow \alpha \in [1.869, 2]$$

$$x_3 = 1.8879 \Rightarrow f(x_3) = 0.083 > 0 \Rightarrow \alpha \in [1.8879, 2]$$

$$|x_3 - x_2| = 0.0189 < \varepsilon \Rightarrow \alpha \approx x_3 = 1.8879$$

تمرين :

باستخدام طريقة القواطع أوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = x.e^x - 1 = 0$ في المجال $[1,2]$
بدقة $\varepsilon = 0.02$

... انتهت المحاضرة (4) ...