كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق
السنة : الثالثة
المقرر : التحليل العقدي (1)
الفصل : الأول
المحاضرة : (2)
التاريخ : 2013-9-29

مرافق عدد عقدي :

بفرض $z = x + iy$ عدد عقدي عندئذٍ نسمي $\bar{z} = x - iy$ مرافق العدد z

خواص مرافق عدد عقدي:

1) $\bar{\bar{z}} = z$
2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3) $\overline{z_1.z_2} = \bar{z}_1.\bar{z}_2$
4) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
5) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; z_2 \neq 0$
6) $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}; \lambda \in R$
7) $z + \bar{z} = 2x$
8) $z - \bar{z} = 2iy$
9) $z.\bar{z} = x^2 + y^2$

طويلة عدد عقدي:

بفرض $z = x + iy$ عدد عقدي عندئذٍ نعرف طويلة العدد z كما يلي :

$$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثال:

$$z = 3 + 4i \qquad \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$z = -1 + i \qquad \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$z = 7i \qquad \Rightarrow |z| = 7$$

$$z = -3 \qquad \Rightarrow |z| = |-3| = 3$$

خواص طويلة العدد العقدي:

1) $\forall\, z \in C \quad |z| \geq 0$
2) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
3) $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$
4) $|z^n| = |z|^n \; ; n \in \mathbb{N}$
5) $|\lambda z| = \lambda |z| \; ; \lambda \in \mathbb{R}$
6) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \; ; z_2 \neq 0$
7) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

مثال:

$$|3(1+i)(3+4i)| = 3|1+i| . |3+4i| = 3\sqrt{2} . 5 = 15\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{(3+2i)^4}{(6+8i)^3}\right| = \frac{|3+2i|^4}{|6+8i|^3} = \frac{169}{1000}$$

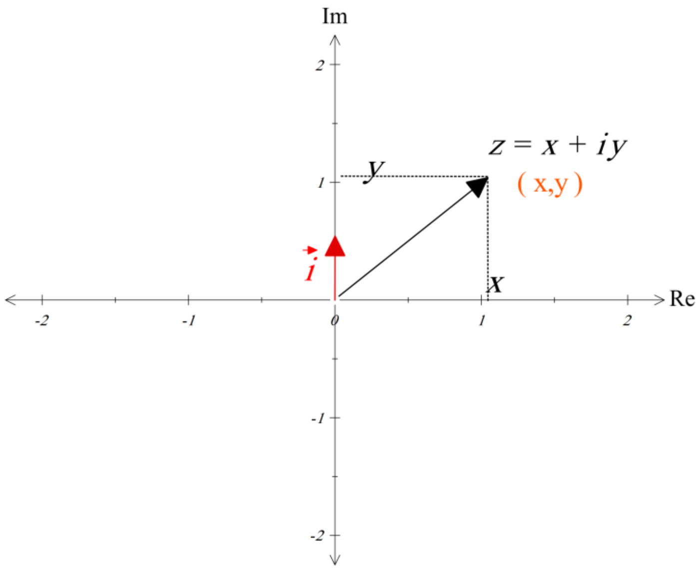
التمثيل الهندسي :

نلاحظ وضوحاً وجود تقابل بين مجموعة الأعداد العقدية C ومجموعة الثنايات المرتبة في الأعداد الحقيقية R^2 أي أن كل عدد عقدي $z = x + iy$ من C يقابله ثنائية (x, y) من R^2 وبالتالي يمكن تمثيل الأعداد العقدية في مستوٍ ندعوه بالمستوي العقدي أو مستوي غاوس. نلاحظ أن المحور الأفقي يمثل أعداد حقيقية بحتة لذلك نسميه بالمحور الحقيقي (Re) كذلك المحور العمودي يمثل أعداد تخيلية بحتة لذلك ندعوه بالمحور التخيلي (Im) كما نلاحظ أن العدد العقدي $z = x + iy$ يقابله شعاع في المستوي مبدأه مبدأ الإحداثيات ونهايته النقطة (x, y) ومقاسه

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ وبالتالي يمكن تزويد مجموعة الأعداد العقدية C بقانون تشكيل خارجي (الضرب بعدد حقيقي) كما يلي:

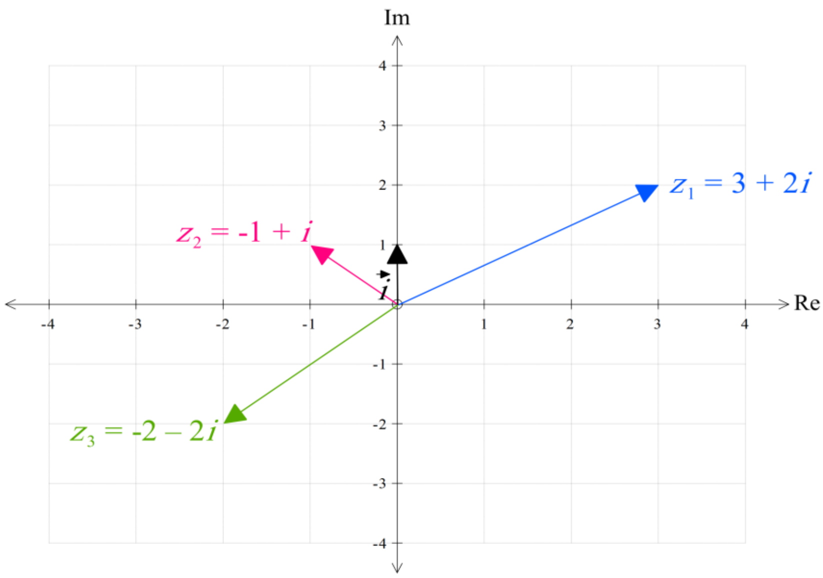
$$\forall\, \lambda \in R : \; \lambda . z = \lambda(x + iy) = \lambda x + i(\lambda y)$$

وبالتالي نعتبر $(c, +, .)$ فضاءً شعاعياً على R بعده 2 حيث $\{1, i\}$ قاعدة لـ C.



مثال: مثل الأعداد التالية هندسياً:

$$z_1 = 3 + 2i\ ,\quad z_2 = -1 + i\ , z_3 = -2 - 2i$$



ظير عدد عقدي هندسياً:

- نظير عدد عقدي هندسياً هو نظيره بالنسبة لمبدأ الاحداثيات.
- مرافق عدد عقدي هندسياً هو نظيره بالنسبة للمحور الحقيقي.

مجموع عددين عقديين هندسياً :

إنَّ جمع وطرح الأعداد العقدية يقابلها في المستوي جمع وطرح الأشعة.

البعد بين عددين عقديين هندسياً:

نعرف البعد بين العددين العقديين z_1, z_2 هندسياً بأنه طويلة الفرق بينهما ويكون:

$$|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$$

سؤال: هل C حقل مرتب كليَّاً ؟؟

لا لأنّ $i^2 = -1$ وهذا مرفوض في الحقل المرتب كليّاً.

سؤال: هل $R \subset C$ ؟؟

هندسيّاً: نعم لأن المستقيم جزء من المستوي بينهما، جبريّاً: لا لأنّ لكل مجموعة طبيعية خاصة.

وللتخلص من هذا الالتباس نورد المبرهنة التالية.

مبرهنة:

إن الحقل C حقل جزئي ذو تشاكل تقابلي مع R

الإثبات:

نعرف مجموعة $R = \{(x,0)\,,(x,0)\}$

من الواضح أن $(R,+,.)$ تحقق شروط الحقل بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب المعرَّفتين على C حيث $(0,0)$ حيادي الجمع $(1,0)$ حيادي الضرب وبالتالي R حقل جزئي من C

نعرّف التطبيق:

$$f : R \longrightarrow R$$
$$x \rightarrow (x,0)$$

نلاحظ أن f تقابل وضوحاً

كذلك:

$$f(x+y) = (x+y,0) = (x,0) + (y,0) = f(x) + f(y)$$

$$f(x.y) = (x.y,0) = (x,0).(y,0) = f(x).f(y)$$

وبالتالي f تشاكل تقابلي .... وهو المطلوب

انتهت المحاضرة