* المحاضرة: الثالثة: ١٧/١٠/٢٠١٣.

* نتيجة:

ليكن A جبرلي، عندئذ $[d, ad_x] = ad_{dx}$ وذلك مهما يكن $d \in Der(A)$ ومهما يكن: $x \in A$.

البرهان: ليكن $z \in A$ عندئذ:

$$[d, ad_x](z) = (d \circ ad_x)(z) - (ad_x \circ d)(z)$$
$$= d(ad_x(z)) - ad_x(dz)$$
$$= d[x, z] - [x, dz]$$
$$= [dx, z] + [x, dz] - [x, dz]$$
$$= [dx, z] = ad_{dx}(z)$$

وبالتالي العلاقة صحيحة.

** جبورلي الجزئية، والمثاليات في جبرلي:

* تعريف:

يُقال عن جزء S من جبرلي A أنه جبر جزئي من A إذا كان S فضاء جزئي من A، وكان: $[S, S] \subseteq S$.

بمعنى آخر: إذا كانت S مستقرة بالنسبة للعمليات الثلاث.

أي:

$$\alpha x + \beta y \in S \quad , \forall \alpha, \beta \in R \quad , \forall x, y \in S$$
$$[S, S] \subseteq S$$

مستقرة: (مغلقة) Stable.

* تعريف:

ليكن A جبرلي، وليكن S جبراً جزئياً من A.

لا عوالمجموعة: $A \supseteq N(S) = \{x \in A : ad_x(S) \subseteq S\}$

$\Leftrightarrow ad_x(S) \subseteq S$

$\Leftrightarrow \forall s \in S : ad_x(s) \in S$

$\forall s \in S : [x, s] \in S$

بناظم S في جبرلي A.

* مبرهنة:

$N(S)$ جبر جزئي من A.

- البرهان: إن: $N(S)$ مقاس جزئي من المقاس A.

إن: $N(S) \neq \emptyset$

إن: $0 \in N(S)$ لأن:

$\forall s \in S : ad_0(s) = [0, s] = 0 \in S$

وأيضاً إن $N_A(S)$ مقاس جزئي من A وذلك لأنه إذا كان x, y عنصرين من $N_A(S)$ و $\forall \alpha, \beta \in R$ فإنه: $ad_x(S) \subseteq S$ كما أنه: $ad_y(S) \subseteq S$ وبالتالي يكون:

$$\begin{aligned} ad_{\alpha x + \beta y}(s) &= [\alpha x + \beta y, s] \\ &= \alpha[x, s] + \beta[y, s] \\ &= \alpha\, ad_x(s) + \beta\, ad_y(s) ; \quad \forall s \in S \end{aligned}$$

ومنه: $\alpha x + \beta y \in N_A(S)$.

وأيضاً: بفرض أن: $x, y \in N_A(S)$ فنجد:

$$ad_{[x,y]}(s) = [[x, y], s] = -[s, [x, y]]$$

$= [x, [y, s]] - [y, [x, s]]$ (حسب متطابقة جاكوبي)

$$\Rightarrow \underset{[xy]}{ad}(s) = \underset{x}{ad}[y,s] - \underset{y}{ad}[x,s]$$

$$= \underbrace{\underset{x}{ad}(\underset{y}{ad}(s)_{\in S})}_{\in S} - \underbrace{\underset{y}{ad}(\underset{x}{ad}(s)_{\in S})}_{\in S} \in S$$

وبالتالي، $\underset{[xy]}{ad}(s) \in S$ ، وذلك : $\forall s \in S$ ونستنتج

$[x,y] \in N_A(S)$ وهذا يدل على أن : $N_A(S)$ جبر جزئي من جبرلي A.

* ملاحظة:

إذا كان $N_A(S) = S$ فإننا نسمي S في هذه الحالة الخاصة بالناظم الذاتي في جبرلي A.

* تعريف :(المثالي في جبرلي):

ليكن A جبرلي. يقال عن جزء I من A إنه مثالي في A :

أ- إذا كان مقاساً جزئياً من A.

ب- وكان مستقراً بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق الداخلية على A.

أي: $\underset{x}{ad}(I) \subseteq I$ وذلك $\forall x \in A$.

أي:

$$\underset{x}{ad}(z) \in I \quad ; \forall x \in A, \forall z \in I$$

$$\Rightarrow [x,z] \in I \quad ; \forall x \in A, \forall z \in I.$$

* تعريف: (المثالي المميزي جبرلي):-

يُقال عن الجزء I من A إنه مثالي مميزي A إذا:

م- كان مقاساً جزئياً من A.

ن- وكان مستقراً بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق على A.

أي: $d(I) \subseteq I$ وذلك $\forall d \in Der(A)$

* ملاحظة:-

كل مثالي مميزي جبرلي يكون مثالياً، ولكن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة. (وذلك لأن كل تطبيق إشتقاق هو تطبيق إشتقاق داخلي والعكس ليس صحيحاً بالضرورة).

* نظرية:-

إن تقاطع مثاليين في جبرلي A يكون مثالياً.

- البرهان: ليكن I، J مثاليين في جبرلي A.

نعلم أن تقاطع مقاسين جزئيين من مقاس A يكون مقاساً جزئياً من A.

وسنبين أن التقاطع مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق الداخلية.

أي سنبين:

$ad_x(I \cap J) \subseteq I \cap J$ وذلك: $\forall x \in A$

ليكن:

$$y \in I \cap J \Rightarrow \left.\begin{matrix} y \in I \\ \wedge \\ y \in J \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} ad_x(y) \in I & \text{(لأن } I \text{ مثالي)} \\ ad_x(y) \in J & \text{(لأن } J \text{ مثالي)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow ad_x(y) \in I \cap J \ ; \ \forall x \in A$$

* نظرية:

إنّ مجموع مثاليين في جبرلي A يكون مثالياً في A.

- البرهان: ليكن J، I مثاليين في جبرلي A.

نعلم أنّ مجموع مقاسين جزئيين من مقاس A يكون مقاساً جزئياً من A. أي أنّ: I + J هو مقاس جزئي من A.

- وسنبين أنّ المجموع مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق الداخلية: أي سنبين أنّ:

$ad_x(I+J) \subseteq I+J$ وذلك $\forall x \in A$.

ليكن $y \in I+J \Leftarrow y = \underset{I}{\underset{\cap}{a}} + \underset{J}{\underset{\cap}{b}}$ ومنه:

$$ad_x(y) = ad_x(a+b) = [x, a+b]$$
$$= [x, a] + [x, b]$$
$$= \underbrace{ad_x(a) + ad_x(b)}_{\underset{I}{\cap} + \underset{J}{\cap}} \in I + J$$

$\underset{\cap}{I+J}$ (وذلك لأنّ كل من J، I مثالي في A)

ومنه: I + J مثالي في A.

* اصطلاح:-

إذا كان J، I مقاسان جزئيان من جبرلي A.

فنرمز بـ [I ، J] للمقاس الجزئي من A المولد بعناصر من النمط [x,y] حيث: $x \in I$ ، $y \in J$. وينتج مباشرة أنّ:

$$[I, J] = [J, I]$$

* نظرية:-

إذا كان: J و I مثاليين في جبرلي A فإنّ [J,I] مثالياً في A.

_البرهان:

١)_ إنّ $[I,J]$ مقاس جزئي من A وذلك اعتماداً على تعريف $[I,J]$ (لأنّ كلاً من I و J مقاس جزئي من A).

٢)_ لنبرهن الآن أنّ $[I,J]$ مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق الداخلية على A.

$$\forall x\in A\ ,\ \forall y\in I\ ,\ \forall z\in J:$$

$$ad_x[y,z]=[x,[y,z]]$$

وحسب متطابقة جاكوبي:

$$[x,[y,z]]=-[y,[z,x]]-[z,[x,y]]$$
$$=[y,[x,z]]+[[x,y],z]$$
$$=[y,ad_x z]+[ad_x y,z]$$

إنّ كلاً من J و I مثالي فرضاً، عندئذٍ

$$ad_x z\in J\quad\wedge\quad ad_x y\in I$$

أي أصبح لدينا:

$$ad_x[y,z]=\underbrace{[y,ad_x z]}_{\in\,[I,J]}+\underbrace{[ad_x y,z]}_{\in\,[I,J]}$$

وبما أنّ:_ $[I,J]$ مقاس جزئي من A فإنّ:_ $ad_x[y,z]\in[I,J]$

أيّ: $ad_x[I,J]\subseteq[I,J]$

بتحقق ١) و2) يكون: $[I,J]$ مثالي في A.

*نظرية:_ إذا كان J و I مثاليين مميزين في جبر لي A، فإنّ $[I,J]$ مثالي مميز في A.

_البرهان:

١_ إنّ $[I,J]$ مقاس جزئي من A (حسب تعريف $[I,J]$)

٢_ لنبرهن الآن أنّ $[I,J]$ مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق على A.

إذا كان: $d\in Der(A)$ ، $\forall z\in J$ ، $\forall y\in I$ فإنَّ:

$$d[y,z]=[dy,z]+[y,dz]$$

وبما أنَّ J و I مثاليين مميزين في جبرلي A فرضاً. عندئذٍ:

$$dy\in I \quad \wedge \quad dz\in J$$

وبما أنَّ: $[I,J]$ مقاس جزئي من A، فإنَّ:

$$d[y,z]\in[I,J]$$

ومنه: $d[I,J]\subseteq[I,J]$

وبالتالي: $[I,J]$ مثالي مميز في A. #.

* ملاحظة:

عندما عرّفنا المثالي في جبرلي اشترطنا في الشرط الثاني أن يكون I مستقراً بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق الداخلية على A أي:

$$\forall x\in A : ad_x(I)\subseteq I$$

إنَّ هذا الشرط يكافئ:

$$\forall x\in A ,\ \forall y\in I : ad_x(y)\in I$$

وهو يكافئ أيضاً:

$$\forall x\in A ,\ \forall y\in I : [x,y]\in I$$

أي هو يكافئ: $[A,I]\subseteq I \quad \ldots(*)$

وبما أنَّ: $[A,I]$ مقاس جزئي من A (حسب اصطلاح سابق)

إذن ينتج مباشرةً أنَّ: $[A,I]=[I,A]$.

* نظرية:

ليكن A جبرلي عندئذٍ: $Inn(A)$ يكون مثالياً في جبرلي $Der(A)$.

_البرهان:

إنَّ $ad_0\in Inn(A) \Leftarrow Der(A)\supseteq Inn(A)\neq\emptyset$.

لنبرهن أولاً أنَّ: $Inn(A)$ مقاس جزئي من $Der(A)$:

ليكن: $x,y\in A$ وليكن: $\alpha,\beta\in R$ عندئذٍ مهما يكن $z\in A$:

$$(\alpha ad_x + \beta ad_y)(z) = \alpha . ad_x(z) + \beta . ad_y(z)$$
$$= \alpha [x, z] + \beta [y, z]$$
$$= [\alpha x, z] + [\beta y, z]$$
$$= [\alpha x + \beta y, z] = ad_{\alpha x + \beta y}(z)$$

وبما أنّ:

A مغلقة، فإنّ $\alpha x + \beta y \in A$ وبالتالي:

$ad_{\alpha x + \beta y} \in Inn(A)$ وهذا يكافئ أنّ:

$\alpha ad_x + \beta ad_y \in Inn(A)$ أي: $Inn(A)$ مغلق جزئي من $Der(A)$.

- لنبرهن الآن أنّ: $[Der(A), Inn(A)] \subseteq Inn(A)$

ليكن: $d \in Der(A)$ ، $ad_x \in Inn(A)$. عندئذٍ ومهما يكن $z \in A$:

$$[d, ad_x](z) = (d \circ ad_x - ad_x \circ d)(z)$$
$$= d(ad_x(z)) - ad_x(d(z))$$
$$= d[x, z] - [x, dz]$$
$$= [dx, z] + [x, dz] - [x, dz]$$
$$= [dx, z] = ad_{dx}(z)$$

وبما أنّ: $dx \in A$ فإنّ: $ad_{dx} \in Inn(z)$ وبالتالي:

$$[d, ad_x] \in Inn(A)$$

ومنه: $Inn(A)$ يكون مثالياً في جبر لي $Der(A)$.

انتهت المحاضرة الثالثة * * *