أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية :

1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

الحل :

$$dy = -\frac{1}{x^2}dx \Longrightarrow y = \frac{1}{x} + c$$

2) $y' = e^{-y}$

الحل :

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-y} \Rightarrow \frac{dy}{e^{-y}} = dx$$

$$e^{y} = x + c \Rightarrow y = \ln(x + c)$$

3) $(x^2 + 1)(y^2 - 1)dx + 2x.y.dy = 0$

الحل :

((نقسم على $x(y^2 - 1) \neq 0$))

$$\Longrightarrow \frac{x^2 + 1}{x}\,dx + \frac{2y}{y^2 - 1}dy = 0$$

$$\Rightarrow x.dx + \frac{1}{x}.dx + \frac{2y}{y^2 - 1}dy = 0$$

$$\underset{\text{بالمكاملة}}{\Rightarrow} \frac{1}{2}x^2 + ln|x| + \ln|y^2 - 1| = ln|c|$$

4) $e^{x+y}dy = e^{-2x}dx$

الحل :

$$(e^x.e^y)dy = e^{-2x}dx$$

$$e^y\mathrm{dy} = e^{-3x}dx$$

$$\Rightarrow e^y = -\frac{1}{3}e^{-3x} + c$$

$$\Rightarrow y = ln\left|-\frac{1}{3}e^{-3x} + e^c\right|$$

- يوجد الكثير من المعادلات التفاضلية التي تُرد لمعادلات قابلة للفصل وهي من الشكل :

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث a, b, c ثوابت

لحل المعادلة (1) نفرض التحويل التالي :

$$z = ax + by + c$$

$$dz = a.dx + b.dy$$

$$dz - a.dx = b.dy$$

نقسم على dx

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} - a = b.\frac{dy}{dx}$$

ولكن لدينا $\frac{dy}{dx} = f(z)$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} - a = b.f(z)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = b.f(z) + a$$

وهي معادلة تفاضلية قابلة للفصل (أي قابلة لفصل متحولاتها)

$$dx = \frac{dz}{b.f(z) + a}$$

$$x = \int \frac{dz}{b.f(z) + a}$$

حيث c ثابت كيفي

مثال (1) :

أوجد حل المعادلة التالية

$$y' = x + y + 1$$

الحل :

بفرض $z = x + y + 1$ فإن

$$dz = dx + dy \Rightarrow$$

$$dz - dx = dy$$

نقسم على dx

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} - 1 = \frac{dy}{dx}$$

ولكن $y' = \frac{dy}{dx} = z$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} - 1 = z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = z + 1$$

ومنه

$$dx = \frac{dz}{z+1}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{تكامل}} x = ln|z+1| + ln|c| \Rightarrow x = ln|c(z+1)|$$

$$c(z+1) = e^x \Rightarrow 1 + z = \frac{e^x}{c}$$

بفرض $c_1 = \frac{1}{c}$ فإن $1 + z = c_1 . e^x$

$$z = c_1 . e^x - 1 \Longrightarrow x + y + 1 = c_1 . e^x - 1$$

$$\Longrightarrow y = c_1 . e^x - x - 2$$

مثال (2) :

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y' = \frac{1}{x + y - 1}$$

الحل :

نفرض $z = x + y - 1$

$$\Rightarrow dz = dx + dy$$

$$dz - dx = dy$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} - 1 = \frac{dy}{dx}$$

ولكن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} - 1 = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1 + z}{z}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{z}{z + 1} \, dz$$

$$\Rightarrow x = \int \frac{z}{z + 1} dz = \int \frac{z + 1 - 1}{z + 1} dz$$

$$\Rightarrow x = \int dz - \int \frac{dz}{z + 1}$$

$$\Rightarrow x = z - ln|z + 1| + ln|c|$$

ثم نتابع الحل حتى نصل إلى $y = \cdots$

... انتهت المحاضرة (3) ...