كلية العلوم قسم الرياضيات - جامعة دمشق

السنة : الثانية

المقرر : معادلات تفاضلية (1)

الفصل : الأول

المحاضرة : (2)

التاريخ : 2013/9/30

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى :

تعريف :

المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى لها الشكل :

$$\boxed{f(x,y,y')=0} \quad ....(1)$$

تكون مستمرة بالنسبة لمتحولاتها الثلاث.

حالات خاصة :

1- إذا كانت العلاقة (1) لا تتعلق بالمتغير x فنأخذ الشكل :

$$f(y,y')=0$$

2- وإذا كانت العلاقة (1) لا تتعلق بـ y فتأخذ الشكل :

$$f(x,y')=0$$

3- وإذا كانت لا تتعلق بـ x,y فنأخذ الشكل :

$$f(y')=0$$

- إذا أمكن إيجاد y' بدلالة x,y فعندها نقول عن المعادلة التفاضلية أنها محلولة بالنسبة للمشتق y' وتأخذ الشكل :

$$\boxed{y'=f(x,y)} \quad ....(2)$$

حالات خاصة :

1- إذا كانت العلاقة (2) تتعلق بـ x فقط فنأخذ الشكل :

$$y' = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)dx$$

$$\Rightarrow y = \int f(x)dx + c$$ حيث c ثابت التكامل

2- إذا كانت العلاقة (2) تتعلق بـ y فقط فنأخذ الشكل :

$$y' = f(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow dx = \frac{dy}{f(y)}$$

$$\Rightarrow x = \int \frac{dy}{f(y)} + c$$

المعادلات التفاضلية ذات المتحولات القابلة للفصل :

تأخذ الشكل :

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \quad ....(3)$$

حيث g_1, g_2, f_1, f_2 دوال مستمرة

بالتقسيم على $f_2(x)g_1(y)$ نحصل على

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0 \quad ....(4)$$

وبالتكامل نحصل على الحل العام

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = c$$

مثال (1) :

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{بالمكاملة}}$$

$$arctg\, y = arctg\, x + arctg\, c$$

تذكر القانون :

$$\boxed{arctg\, b + arctg\, a = arctg\, \frac{b+a}{1-b.a}}$$

ومنه

$$arctg\, y = arctg \frac{x+c}{1-x.c}$$

الحل العام

$$\boxed{y = \frac{x+c}{1-x.c}}$$

مثال (2) :

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y' = \frac{y^2 - 4y}{x}$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4y}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y^2 - 4y} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \frac{dy}{y(y-4)} = \frac{dx}{x}$$

إن

$$\frac{1}{y(y-4)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-4}$$

$$A = -\frac{1}{4}\ , B = \frac{1}{4}$$

ومنه

$$\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{y-4} - \frac{1}{y}\right) dy = ln|x| + ln|c|$$

$$\frac{1}{4}[ln|y-4| - ln|y|] = ln|x| + ln|c|$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\ln|y-4|}{\ln|y|}\right] = \ln|x| + \ln|c|$$

$\frac{1}{4}\left[ln\frac{y-4}{y}\right] = ln|x| + ln|c|$ ثم نكمل حتى نصل إلى $y = \cdots$

مثال (3) :

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y' = 3x^2y$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{1}y \Longrightarrow$$

$$dy = 3x^2ydx$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{y} = 3x^2dx$$

$$\Longrightarrow ln|y| = x^3 + c$$

$$y = e^{x^3+c}$$

وظيفة :

1) $y' = e^{-y}$
2) $y' = e^{4x}$
3) $(x^2+1)(y^2-1)dx + xydy = 0$
4) $xy' - y = 0$
5) $x^2y' = y$

... انتهت المحاضرة (2) ...