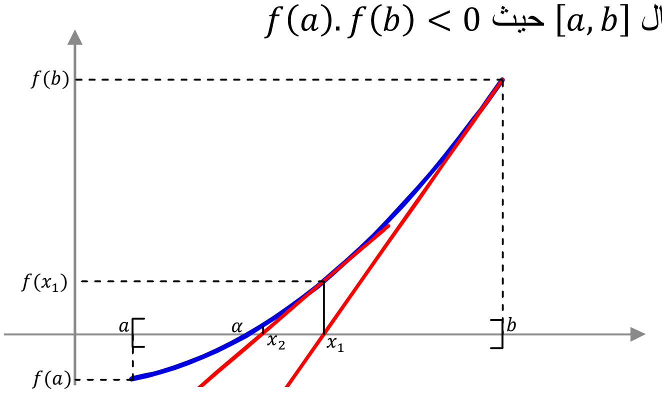
كلية العلوم قسم الرياضيات - جامعة دمشق — السنة : الثانية

المقرر : تحليل عددي (1) — الفصل : الأول

المحاضرة : (5) — التاريخ : 2013/10/22

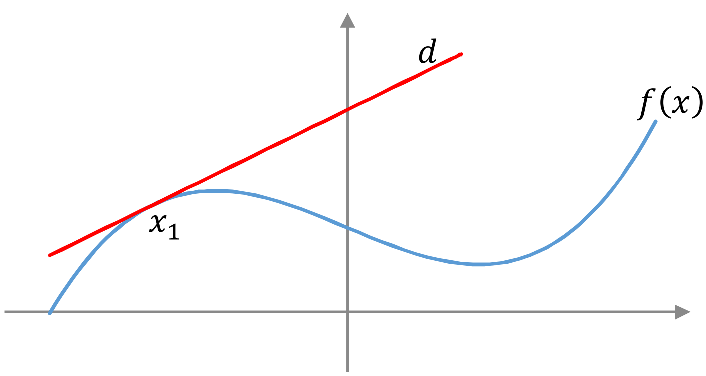
ثالثا : طريقة المماسات :

ليكن $f(x)$ تابع مستمر و قابل للاشتقاق على المجال $[a,b]$ حيث $f(a).f(b)<0$



نختار احدى النقطتين ولتكن b وللننشئ المماس المار بالنقطة $\big(b,f(b)\big)$ والذي يقطع المحور $\overrightarrow{ox}$ بالنقطة x_1 ثم نرسم المماس المار من النقطة $\big(x_1,f(x_1)\big)$ فيقطع المحور $\overrightarrow{ox}$ بالنقطة x_2 ثم نكرر هذه العملية حتى نحصل على قيمتين x_n ، x_{n-1} تحققان $|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$ حيث ε الدقة المطلوبة .

تذكرة :



تكتب معادلة المستقيم من الشكل

$$d: y-y_1=m(x-x_1)$$

وبالنسبة لمماس لتابع $f(x)$ عند النقطة x_1 فهي من الشكل

$$d: y-y_1=f'(x_1)\times(x-x_1)$$

نلاحظ أن معادلة المماس المار من النقطة $\big(a,f(a)\big)$ على الشكل $y-f(a)=f'(a)\times(x-a)$

كذلك نقطة تقاطع هذا المستقيم مع $\overrightarrow{ox}$ تتحدد من حل المعادلة $y=0$ ولتكن x_1 فاصلة نقطة التقاطع فيكون

$$0-f(a)=f'(a)\times(x_1-a)\Rightarrow x_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

بعد التكرار n مرة يصبح القانون على الشكل :

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$$

((قانون المماسات)) للحفظ

مثال :

باستخدام طريقة المماسات أوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = x^3 - 7x + 1 = 0$

في المجال $[0,1]$ بدقة $\varepsilon = 0.001$

الحل :

نلاحظ أن $f(a) = f(0) = 1 > 0 \quad , \quad f(b) = f(1) = -5 < 0$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[0,1]$ وليكن α

كذلك $f(x)$ تابع حدودي قابل للاشتقاق حيث $f'(x) = 3x^2 - 7$

نطبق قانون المماسات انطلاقاً من $a = 0$ ((لأن $f(0) = 1$ أقرب إلى الصفر من $f(1) = -5$)) فنجد :

$$f'(a) = f'(0) = -7 \Rightarrow x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = 0 - \frac{1}{-7} = 0.1428 \Rightarrow f(x_1) = 0.0033$$

$$f'(x_1) = f'(0.1428) = -6.9388 \Rightarrow x_2 = 0.1432 \Rightarrow f(x_2) = 0.0005$$

نلاحظ أن $|x_2 - x_1| = 0.0004 < \varepsilon$ ومنه $\alpha \approx x_2 = 0.1432$

ملاحظة :

نلاحظ أن اختيارنا لـ b في المثال السابق سيعطي نتائج غير صحيحة كالآتي :

$$f'(b) = f'(1) = -4 \Rightarrow x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 1 - \frac{-5}{-4} = -2.5$$

نلاحظ أن x_1 خارج المجال $[0,1]$

ملاحظة :

طريقة المماسات تؤدي إما إلى الاقتراب من الجذر أو الابتعاد عنه فإذا كنا نستخدمها من أجل أحد طرفي المجال و أعطى نتائج غير صحيحة فإننا نختار الطرف الآخر من المجال كما أن طريقة المماسات من أسرع الطرق في ايجاد الجذور التقريبية للمعادلات .

مثال2 :

باستخدام طريقة المماسات أوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = 3x + \sin x - e^x = 0$

في المجال $[1,2]$ بدقة $\varepsilon = 0.02$

الحل :

نلاحظ أن $f(a) = f(1) = 1.123 > 0 \quad , \quad f(b) = f(2) = -0.4797 < 0$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[1,2]$ وليكن α

كذلك $f(x)$ تابع حدودي قابل للاشتقاق حيث $f'(x) = 3 + \cos x - e^x$

نطبق قانون المماسات انطلاقاً من $b = 2$

(لأن $f(2) = -0.4797$ أقرب إلى الصفر من $f(1) = 1.123$) فنجد :

$$f'(b) = f'(2) = -4.8052 \Rightarrow x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 2 - \frac{-0.4797}{-4.8052} = 1.9001$$

$$\Rightarrow f(x_1) = -0.0399 \Rightarrow \ f'(x_1) = f'(0.1428) = -4.0099$$

$$\Rightarrow x_2 = 1.8901 \Rightarrow f(x_2) = -0.0002$$

نلاحظ أن $|x_2 - x_1| = 0.01 < \varepsilon$ ومنه $\alpha \approx x_2 = 1.8901$

وظيفة :

أوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = 5x - 8\,ln\,(x) - 8 = 0$ في المجال $[3,4]$ بدقة $\varepsilon = 0.01$

باستخدام الطرق الثلاثة .

... انتهت المحاضرة (5) ...