كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق

السنة : الثانية

المقرر : تحليل عددي 2

الفصل : الأول

المحاضرة :(10)

التاريخ : 2013/11/12

تقدير الخطأ المرتكب في حساب الاستيفاء :

مبرهنة :

ليكن $y = f(x)$ تابع قابل للاشتقاق $(n+1)$ مرة حيث :

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

بحيث $x_0, x_1, \dots\ , x_n$ نقاط ارتكاز مرتبة تصاعدياً و ليكن $\bar{x}\ \in [x_0, x_n]$

حيث $\bar{x}$ مختلفة عن $x_0, x_1, \dots\ , x_n$

$$w(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

((الرمز $\prod$ نظير $\sum$ بالنسبة للضرب أي يقوم بنفس عملها لكن بالنسبة لعملية الضرب بدلا من الجمع))

ولتكن $P_n(x)$ حدودية الاستيفاء للتابع المعرف بالجدول السابق عندئذٍ الخطأ المرتكب في حساب $f(\bar{x})$ يعطى بالعلاقة :

$$\boxed{|e(\bar{x})| \le \frac{M \times |w(\bar{x})|}{(n+1)\,!}}\ ;\ M = \max\left|f^{(n+1)}(\mu)\right|\ ;\ x_0 \le \mu \le x_n$$

الإثبات :

نعلم أن قيمة الخطأ الفعلية هي $e(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})$

نعرف التابع المساعد التالي :

$$\varphi(x) = f(x) - P_n(x) - e(\bar{x})\frac{w(x)}{w(\bar{x})}$$

نلاحظ أن التابع ينعدم عند $(n+1)$ نقطة وهي : $\{x_0, x_1, \dots\ , x_n, \bar{x}\}$

((عندما $x\ \in \{x_0, x_1, \dots\ , x_n\}$ يكون $f(x) - P_n(x) = 0$ و $w = 0$ أي $\varphi(x) = 0$))

((وعندما $x = \bar{x}$ يكون $f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = e(\bar{x})$ و $\frac{w(x)}{w(\bar{x})} = 1$ أي $\varphi(x) = e(\bar{x}) - e(\bar{x}) = 0$))

((نص مبرهنة رول : إذا كان التابع ينعدم $n+1$ مرة في مجال فإن مشتقه من الرتبة n ينعدم في هذا المجال))

وحسب مبرهنة رول : $\exists\, \mu \in [x_0, x_n] : \varphi^{(n+1)}(\mu) = 0$

نشتق التابع $\varphi\,(x)$ $(n+1)$ مرة فنجد :

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - (n+1)! \times \frac{e(\bar{x})}{w(\bar{x})}$$

نعوض $x = \mu$ فنجد :

$$0 = f^{(n+1)}(x) - (n+1)! \times \frac{e(\bar{x})}{w(\bar{x})} \Rightarrow e(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(x) \times w(\bar{x})}{(n+1)!}$$

نضع $M = \max\left|f^{(n+1)}(\mu)\right|$ حيث $x_0 \le \mu \le x_n$ فنجد : $|e(\bar{x})| \le \frac{M \times |w(\bar{x})|}{(n+1)\,!}$

مثال :

باستخدام طريقة لاغرانج أوجد الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x) = \frac{1}{x}$ المعرف عند النقاط $4\ ,\ 2.5\ ,\ 2$ ثم احسب بشكل تقريبي $f(3)$ واحسب الخطأ المرتكب

الحل :

نوجد قيم $f(x)$ عند نقاط الارتكاز فنجد الجدول الآتي :

x	2	2.5	4
$f(x)$	0.5	0.4	0.25

ثم نوجد حدوديات لاغرانج :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(-0.5)(-2)} = x^2 - 6.5x + 10$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(0.5)(-1.5)} = \frac{-4}{3}(x^2 - 6x + 8)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(2)(1.5)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4.5x + 5)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{4}x + 5 - \frac{8}{15}x^2 + \frac{16}{5}x - \frac{64}{15} + \frac{1}{12}x^2 - \frac{4.5}{12}x + \frac{5}{12}$$

$$P_2(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$$

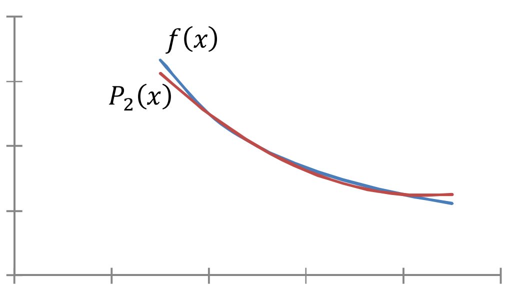
$$\Rightarrow f(3) \approx P_2(3) = 0.325$$

لحساب الخطأ المرتكب نضع

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \text{ و } f''(x) = \frac{2}{x^3} \text{ و } f'''(x) = \frac{-6}{x^4}$$

$$M = \max|f'''(\mu)| : 2 \le \mu \le 4$$

$$= \frac{6}{(2)^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375$$



$$w(3) = (3-2)(3-2.5)(3-4) = -0.5 \Rightarrow |w(3)| = 0.5$$

$$\Rightarrow |e(3)| \leq \frac{(0.375)(0.5)}{3\times2\times1} = 0.03125 > e(3) = |P_2(3) - f(3)| = 0.0083$$

مثال :

باستخدام طريقة لاغرانج أوجد الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x) = \cos x$ المعرف عند النقاط $0 \ , \ 0.1 \ , \ 0.2$ ثم احسب بشكل تقريبي $f(0.05)$ واحسب الخطأ المرتكب

الحل :

نوجد قيم $f(x)$ عند نقاط الارتكاز

فنجد الجدول الآتي :

x	0	0.1	0.2
$f(x)$	1	0.998	0.98

ثم نوجد حدوديات لاغرانج :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0.1)(x-0.2)}{(-0.1)(-0.2)} = \frac{x^2-0.3x+0.02}{0.02}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-0.2)}{(0.1)(-0.1)} = \frac{x^2-0.2x}{-0.01}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-0.1)}{(0.2)(0.1)} = \frac{x^2-0.1x}{0.02}$$

$$P_2(x) = 50x^2 - 15x + 1 - 99.5x^2 + 19.9x + 49x^2 - 4.9x$$

$$P_2(x) = -0.5x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f(0.05) \approx P_2(0.05) = 0.99875$$

لحساب الخطأ المرتكب نضع :

$$f'(x) = -\sin x \quad \text{و} \quad f''(x) = -\cos x \quad \text{و} \quad f'''(x) = \sin x$$

$$M = \max|f'''(\mu)| : 0 \leq \mu \leq 0.2 \quad \Rightarrow M = \sin(0.2) = 0.1986$$

$$w(0.05) = 0.000375 \ \Rightarrow |e(3)| \leq \frac{(0.1986)(0.000375)}{3\times2\times1} = 0.00001$$

وظيفة :

أعد المثال السابق من أجل $y = f(x) = \sin x$ عند $\{0.1 \, , 0.2 \, , 0.3\}$ ثم احسب $\sin(0.15)$ بشكل تقريبي و الخطأ المرتكب

... انتهت المحاضرة (10) ...