كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق
السنة : الثالثة
المقرر : البنى الجبرية (3)
الفصل : الأول
المحاضرة : (9)
التاريخ : 2013/11/03

مودول القسمة ومبرهنات التماثل :

بناء مودول القسمة :

ليكن N مودولا جزئيا من مودول M على حلقة R , ولنعرف في M العلاقة الثنائية $\sim$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N \qquad (\forall\, x, y \in M)$$

فنجد بسهولة أن العلاقة $\sim$ هي علاقة تكافؤ وأن صف تكافؤ كل عنصر $x \in M$ هو:

$$[x] = \bar{x} = \{x + N\}$$

لنرمز ل~~مجموعة~~صفوف التكافؤ في M بالرمز $M/_N$ أي :

مرافقة $\quad M/_N = \{x + N \quad ; \quad x \in M\}$

تذكرة : $H \subseteq (G,\cdot)\ ,\ a \in G$

$a \cdot H = \{ a \cdot h \ : \ h \in H \}$

المرافقة اليسارية في البنى الجبرية 1

ولنعرف على المجموعة $M/_N$

لاحظ أن $\left(N = 0 + N \in \frac{M}{N} \neq \phi\right)$

قانوني تشكيل :

الأول داخلي : $(+) : (x + N) + (y + n) = (x + y) + N$

الثاني خارجي : مجموعة مؤثراته الحلقة R $\quad (\,.\,) : \propto (x + N) = (\propto x) + N$

فنجد بسهولة أن $\left(M/_N\,, +, \cdot\right)$ مودول على الحلقة R

نسميه مودول القسمة (قسمة M على N) صفره N

تذكرة : حيادي الزمرة $\left(G/_H\,, \cdot\right)$ يحقق :

$(x' \cdot H) \cdot (x \cdot H) = (x \cdot H) \quad \left(\forall x \cdot H \in G/_H\right)$

$(x'x) \cdot H = x \cdot H$

$x' \cdot x = x \Rightarrow x' = e_G = e_H$

$G/_H = \{ x \cdot H \ : \ x \in H \}$

وبالتالي حيادي $G/_H$ هو H

وإذا أخذنا العلاقة :

$$\pi : M \longrightarrow {}^{M}/_{H}$$

$$\pi(x) = x + N$$

تشاكل مودولي غامر نواته N يسمى الغمر القانوني .

وكل مودول جزئي من المودول ${}^{M}/_{H}$ هو من الشكل ${}^{A}/_{H}$ بحيث $\overbrace{N \subseteq A}^{\text{جزء من } M}$

مبرهنة : (مبرهنة التماثل الأولى) :

إذا كان $f : M \longrightarrow N$ تشاكلا مودوليا فإن :

$${}^{M}/_{kerf} \cong Im\, f$$

الإثبات : (طريقة كلاسيكية)

لنأخذ العلاقة : $\varphi : {}^{M}/_{kerf} \longrightarrow \operatorname{Im} f$

$$\varphi\,(x + \ker f) = f(x)$$

من نظرية الزمر نعلم أن φ هو تماثل زمري ، ولإتمام المطلوب يكفي أن نثبت أن :

$$\varphi\left(\propto (x + \ker f)\right) = \propto \varphi(x + \ker f)$$

$$\forall \propto \in R \;\;,\; x + \ker f \in {}^{M}/_{kerf}$$

$$\varphi\left(\propto (x + \ker f)\right) = \varphi(\propto x + \ker f)$$

$$= f(\propto x) = \propto f(x) = \propto \varphi(x + \ker f)$$

إذن φ تشاكل مودولي أي : ${}^{M}/_{kerf} \cong \; Im\, f$

ملاحظات:

1- إذا كان التشاكل f غامرا فإن $N \cong {}^{M}/_{kerf}$

2- إذا كان التشاكل f متباينا فإن $Im\, f \cong \mathrm{M}$

3- لنناقش هذه المبرهنة بلغة المخططات التبادلية :

لننظر إلى المخطط (إلى f^{+})

حيث $f^{+}(x) = f(x)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f^{+}"] \arrow[d, "\pi\text{غامر}"'] & \operatorname{Im} f \\ M/\ker f \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

بما أن $\begin{cases} ker\,\pi = ker\,f = ker\,f^{+} \\ \pi \text{ غامر} \end{cases}$

فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد متباين $\varphi : {}^{M}/_{kerf} \longrightarrow \operatorname{Im} f$

يجعل المخطط تبادليًا أي : $\varphi o \pi = f^{+}$

وبسهولة نجد أن $\varphi\,(x + ker\,f) = f(x)$ غامر

مبرهنة : (مبرهنة التماثل الثانية) :

إذا كان N , P مودولين جزئيين من مودول M وكان $P \subseteq N$ فإن :

$$ {}^{M}/_{kerf} \cong {}^{{}^{M}/_{P}}/_{{}^{N}/_{P}} $$

الإثبات :

لنأخذ العلاقة :

$$ f : {}^{M}/_{P} \longrightarrow {}^{M}/_{N} $$

$$ f(x + P) = x + N $$

فنجد أن f تشاكل زمري غامر نواته ${}^{N}/_{P}$ (من نظرية الزمر)

كما أنه أيا كان $\propto \in R$, $x + P \in {}^{N}/_{P}$ فإن :

$$ f\ \big(\propto (x + P)\big) = f\ (\propto x + P) $$

$$ = \propto x + N = \propto (x + N) = \propto \cdot\, f\ (x + P) $$

وبالتالي f تشاكل مودولي غامر نواته ${}^{N}/_{P}$, وحسب مبرهنة التماثل الأولى يكون :

$$ {}^{{}^{M}/_{P}}/_{{}^{N}/_{P}} \cong {}^{M}/_{N} $$

مبرهنة : (مبرهنة التماثل الثالثة) :

إذا كان $A\ ,B$ مودولين جزئيين من مودول M فإن :

$$\left. A+B \middle/ B \right. \cong \left. A \middle/ A\cap B \right.$$

الإثبات :

يكفي أن نثبت وجود تشاكل مودولي غامر $f : A \longrightarrow \left. A+B \middle/ B \right.$ نواته $A\cap B$

تشاكل الغمر القانوني $\pi : A+B \longrightarrow \left. A+B \middle/ B \right.$

التباين القانوني $J : A \longrightarrow A+B$

فيكون :

تشاكل مودولي غامر $\pi o J : A \longrightarrow \left. A+B \middle/ B \right.$

نواته $A\cap B$ (إثبات ذلك) :

أيا كان $a \in ker(\pi o J)$ فإن :

$$a \in ker(\pi o J) \Leftrightarrow (\pi o J)(a) = B$$

$$\Leftrightarrow (a+b)+B = B$$

$$\Leftrightarrow a \in B \ ; \ a \in A$$

إذن $ker\ (\pi o J) = A\cap B$

::: انتهت المحاضرة التاسعة :::