13/11/2013 المحاضرة الثانية عشرة

مبرهنة:

بفرض $\sum w_n$ ، $\sum z_n$ متسلسلتان عقديتان متقاربتان ومجموعهما S, T على الترتيب عندئذٍ تكون متسلسلة المجموع $\sum (z_n + w_n)$ متقاربة ومجموعها $S+T$

ملاحظة: مجموع متسلسلتين عقديتين متباعدتين ليس بالضرورة متباعدة

مثال:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} = 0$$

مبرهنة: بفرض $\sum z_n$ متسلسلة عقدية ومجموعها S وبفرض $\lambda \in \mathbb{C}$ ثابت عقدي [يجوز صفر] عندئذٍ $\sum \lambda z_n$ متقاربة ومجموعها λS

أي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda z_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \lambda S$$

* التقارب بالإطلاق للمتسلسلات العقدية:

نقول عن المتسلسلة $\sum z_n$ أنها متقاربة بالإطلاق إذا وفقط إذا كانت $\sum |z_n|$ [متسلسلة حقيقية] متقاربة.

مبرهنة: كل متسلسلة عقدية متقاربة بالإطلاق تكون متقاربة.

الإثبات:

بفرض $\sum z_n$ متسلسلة متقاربة بالإطلاق عندئذٍ:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) > 0 : \forall n, m \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |z_m + z_{m+1} + \dots + z_n|$$

$$\leq ||z_m| + |z_{m+1}| + \dots + |z_n|| < \varepsilon$$

لأن $\sum |z_n|$ متقاربة

ومنه $\sum z_n$ متقاربة

ملاحظة: إن عكس هذه المبرهنة ليس صحيح بالضرورة.

مثال: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة ولكن غير متقاربة بالإطلاق لأن

$$\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n} \rightarrow$$ هي متسلسلة متباعدة

مثال

التباعد بالإطلاق ليس بالضرورة أن يعطي تباعد

* اختبارات التقارب للمتسلسلات العقدية :

1] اختبار المقارنة :

نفرض $\sum z_n$ متسلسلة عقدية و $\sum \alpha_n$ متسلسلة حقيقية موجبة ، إذا كانت $\sum \alpha_n$ متقاربة و تحقق .

$n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_0 : |z_n| \leq \alpha_n$

عندئذ $\sum |z_n|$ متقاربة .

وإذا كانت $\sum \alpha_n$ متباعدة و تحقق :

$\exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_0 ; |z_n| \geq \alpha_n$

عندئذ $\sum |z_n|$ متباعدة .

2] اختبار دالامبير :

نفرض $\sum z_n$ متسلسلة عقدية ولنضع :

$$P = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$$

تقارب بالإطلاق م تقارب

عندئذ : إذا كان * $p < 1$ فالمتسلسلة $\sum |z_n|$ متقاربة

وإذا كان * $p > 1$ فالمتسلسلة $\sum z_n$ متباعدة سؤال

* $p = 1$ حالة فشل

3] اختبار كوشي [الجذر النوني] :

نفرض $\sum z_n$ متسلسلة عقدية ولنضع :

$$P = \lim \sqrt[n]{|z_n|}$$

عندئذ : إذا كان $p < 1$ فالمتسلسلة $\sum |z_n|$ متقاربة

وإذا كان $p > 1$ فالمتسلسلة $\sum z_n$ متباعدة .

4] اختبار ليبنتز :

نفرض $\sum (-1)^n x_n$ متسلسلة حقيقية تحقق :

① $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

②

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_0 : x_{n+1} < x_n$$

عندئذ:

$$\sum (-1)^n x_n$$ متقاربة

تمرين: ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات التالية:

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

نلاحظ أنه $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ وأن $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

وبالتالي حسب اختبار ليبنز المتسلسلة متقاربة

$\boxed{2}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \frac{i}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{-i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \cdots\right) + i\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + i \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

(متسلسلة الأجزاء الحقيقية). (متسلسلة الأجزاء التخيلية)

نلاحظ أن متسلسلتا الأجزاء الحقيقية والتخيلية متقاربة حسب ليبنز ومنه المتسلسلة متقاربة.

$\boxed{3}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,(3+4i)^n}$$

يمكن أن نعتبرها العدد حيث تصبح المتسلسلة مساعدة

نضع:

$$P = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$$

حيث نجعل الطويلة أصغر أو أكبر منه

$\frac{a^n}{n^{10}}$ $\quad (x^n)' = nx^{n-1}$

نشتق (a^n) بالطريقة التالية.

$y = a^n$

$\Leftarrow \ln y = \ln a^n = n \ln a$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!\,(3+4i)^{n+1}} \cdot \frac{n!\,.(3+4i)^n}{n^n} \right|$$

دالامبير $\leftarrow n!$

$$= \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left| \frac{1}{3+4i} \right| = \frac{e}{5} < 1$$

وبالتالي حسب اختبار دالامبير المتسلسلة متقاربة بالإطلاق فهي متقاربة

$\boxed{4}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(1+i)^n}{2^n}$$

سؤال: $\sqrt[n]{n} = 1$ أم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

نضع:

$$P = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n\,|1+i|^n}{2^n}}$$

$$= \lim \sqrt[n]{n} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

فالمتسلسلة حسب اختبار كوشي متقاربة بالإطلاق فهي متقاربة

$\boxed{5}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\sqrt{3}i)^n}{n}$$

متقاربة ← إذا كان الحد العام يسعى إلى الصفر
أما إذا كان الحد العام لا يسعى إلى الصفر فلا يمكننا الحكم على تقارب أو تباعد المتسلسلة

نلاحظ أن: $|\ | > 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ أما: $|\ | < 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$|z_n| = \frac{|1+\sqrt{3}i|^n}{n} = \frac{2^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

بما أن الحد العام لا يسعى للصفر فالمتسلسلة متباعدة.

$\boxed{6}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\sqrt{3}i)^n}{5^{\frac{n}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{5}}\right)^n$$

≤ 4 متباعدة
> 4 متقاربة

$$a = \frac{1+\sqrt{2}i}{\sqrt{5}}$$ هي متسلسلة هندسية أساسها.

نلاحظ أن $|a| < 1$ فالمتسلسلة متقاربة.

$\boxed{7}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n^2+n+1}$$

ملاحظة

$$\left|\frac{i^n}{n^2+n+1}\right| = \frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2}$$

بما أن $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة حسب اختبار المقارنة المتسلسلة المدروسة متقاربة بالإطلاق فهي متقاربة.

$\boxed{8}$ $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n} = \frac{-1}{\ln 2} - \frac{i}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \frac{i}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 6} - \frac{i}{\ln 7} + \cdots$$

$$= \left(-\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 6} + \cdots\right) + i\left(\frac{-1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 7} + \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln 2n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2n+1)}$$

متقاربة حسب ليبنز   متقاربة حسب ليبنز

وظيفة

$\boxed{1}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!(e-i)^n}$$

$\boxed{2}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$$

$\boxed{3}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1}$$

$\boxed{4}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^7}$$

$\boxed{5}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(1+i)^n}$$

$\boxed{6}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} 3i^n$$

$\boxed{7}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{\sqrt{n+1}}$$