طرائق البرهان.

١): البرهان بالطريقة المباشرة.
٢): البرهان بواسطة المكافئ العاكس.
٣): البرهان بالتجربة أو الاستنفاذ؟
٤): البرهان بواسطة الحالات.
٥): البرهان بطريقة نقض الفرض
٦): البرهان بواسطة المكافئ العاكس
٧): البرهان بواسطة الاستقراء الرياضي

أثبت صحة العلاقات التالية:

١): $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$: $n\in N$

٢): $2^n < n!$: $n\in N$, $n\geq 4$

٣): $P(n)=n^3-4n+6$ أثبت أن $P(n)$ يقبل القسمة على 3 : $n\in N\cup\{0\}$

٤): $2^n > n$: $n\in N$

٥): $n^n \geq n!$: $n\in N$

٦): $(1+x)^n \geq 1+nx$: $n\in N$: $x\geq 0$

٧): $1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}=\begin{cases}\frac{1-r^n}{1-r} & : r\neq 1\\ n & r=1\end{cases}$

٨): $1+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$

٩): $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

١٠): $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

١١): $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$: $n\in N$

١٢): $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$: $n\in N$

١٣): $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$: $n\in N$.

طريقة الاستقراء الرياضي:

اذا كان لدينا قضية $p(n)$ وأردنا اثبات صحة هذه القضية فعلينا

١) نبين أن هذه القضية صحيحة من أجل القيمة الأولى $n=1$

٢) نفرض صحة العلاقة $p(n)$ من أجل $\{n=k\}$ أو ما دونها $\{n \leq k\}$

٣) نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=k+1$.

عندئذ نقول أن القضية صحيحة.

الحل: ١)

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} : n \in N$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

من أجل $n=1$

١) $n=1$

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 1 \\ T_2 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow T_1 = T_2$$

٢) نفرض صحة العلاقة من أجل $n=k$

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

٣) نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=k+1$

$$1+2+3+\dots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k^2+k+2k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

٢)

$$1+r+r^2+r^3+\dots+r^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-r^n}{1-r} & : r \neq 1 \\ n & : r=1 \end{cases}$$

عندما $r=1$

$$1+1+1+\dots+1 = n$$

ALADIB.net

$$1+r+r^2+\dots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$$ $r\neq 1$ تنوف

أ) من أجل $n=1$

$$\sum_{i=1} r^{i-1}=1=T_1$$

$$T_2=\frac{1-r}{1-r}=1=T_2$$

ب) نفرض أن العلاقة التالية صحيحة من أجل $n=k$

$$1+r+r^2+r^3+\dots+r^{k-1}=\frac{1-r^k}{1-r}$$

ج) نثبت أن القضية صحيحة من أجل $n=k+1$

$$\underbrace{1+r+r^2+\dots+r^{(k)}}_{T_1}=\underbrace{\frac{1-r^{(k+1)}}{1-r}}_{T_2}$$

$$1+r+r^2+\dots+r^{(k-1)}+r^k=\frac{1-r^k}{1-r}+r^k$$

$$\frac{1-r^k+r^k-r^{(k)}r^1}{1-r}=\frac{1-r^{(k+1)}}{1-r}=T_2$$ ص

$$2^n<n!\ :\ n\in N\ ;\ n\geq 4$$

أ) من أجل $n=4$

$2^4=16$; $4!=4\times3\times2\times1=24$

وبالتالي المتراجحة محققة

ب) نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $n=k$

$$2^k<k!$$

ج) نثبت صحة القضية من أجل $n=k+1$

$$2^{k+1}<(k+1)!$$

$$2^k\cdot 2<k!+1$$

/ /

5) طريقة نقض الفرض:

برهن أن $\sqrt{2}$ ليس من الأعداد العادية:

البرهان: نفرض جدلاً بأن $\sqrt{2}$ يكتب على شكل عدد عادي:

أي أنه $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ حيث p, q عددان أوليان فيما بينهما:

بالتربيع: $2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftarrow$ ① — $\boxed{p^2 = 2q^2}$

توضيح: p عدد فردي $\Longleftarrow$ p^2 عدد فردي:

$p = 2k+1 ; k \in N \cup \{0\}$

$p^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$

$p^2 = 2L + 1 \Rightarrow p^2$ عدد فردي.

نستنتج أن p^2 عدد زوجي فإن p عدد زوجي:

p عدد زوجي $p = 2k$ حيث $k \in N \cup \{0\}$

نعوض في ①:

$4k^2 = q^2$

نستنتج أن q^2 عدد زوجي وبالتالي فإن q عدد زوجي

نستنتج مما سبق أن p و q عددان زوجيان ومن ذلك أنهما غير أوليان فيما بينهما مما يناقض الفرض الجدلي وبالتالي $\sqrt{2}$ لا يكتب على شكل عدد عادي.

الطريقة المباشرة:

أثبت أنه إذا كان n عدداً فردياً فإن n^2 عدد فردي.

n عدد فردي $\Longleftarrow$ $n = 2k+1$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2L + 1$ وبالتالي n^2 عدد فردي.