٥: اذا كانت $f \circ g$ غامر فإن f غامر

٦: اذا كانت $f \circ g$ تقابل فإن f متباين و g غامر.

1-3: قوانين التشكيل:

لتكن A ، K مجموعتين غير خاليتين.

○ نقول عن التطبيق $\top : A \times A \longrightarrow A$ والمعرف بالشكل $\top(a,b) = a \top b$ انه قانون تشكيل داخلي معرف على A

⊙ نقول عن التطبيق $\ast : K \times A \longrightarrow A$ المعرف بالشكل. $\forall (k,a) \in K \times A : \ast(k,a) = k \ast a$ بأنه قانون تشكيل خارجي يساري معرف على A.

⊙ نقول عن التطبيق $\ast' : A \times K \longrightarrow A$ والمعرف بالصيغة $\forall (a,k) \in A \times K : \ast'(a,k) = a \ast' k$ أنه قانون تشكيل خارجي يميني

⊙ أي مجموعة غير خالية مثل A ومزودة بقانون تشكيل واحد أو أكثر تسمى بنية جبرية.

مثال: اذا كانت $A = \mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية فإن $(A,+)$ بنية جبرية حيث $+ : A \times A \longrightarrow A$

$$\forall (x,y) \in A \times A : +(x,y) = x + y.$$

انتهت المحاضرة

المحاضرة الثانية:

لتكن $(A, \top)$ بنية جبرية نقول أن $(A, \top)$ زمرة اذا تحققت الشروط التالية:

١: $\forall a,b \in A : a \top b \in A$

٢: $\forall a,b,c \in A : a \top (b \top c) = (a \top b) \top c$

٣: يوجد عنصر حيادي في A بالنسبة لـ $\top$ أي

$\forall a \in A : a \top e = e \top a$

ويسمى e العنصر الحيادي في A

٤: $\forall a \in A : \exists a' \in A$ و

$a \top a' = a' \top a = e$

ويسمى a': نظير (مقلوب) العنصر a في A

⊙ اذا حققت الزوج (A, τ) الشرط التالي:
نقول أن (A, τ) زمرة تبديلية $\forall a,b \in A : a \tau b = b \tau a$

مثال: لتكن $A = \mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة: $(A, +)$ زمرة تبديلية
والحيادي هو 0
$(A, \cdot)$ زمرة تبديلية والحيادي هو (1)
اذا كانت $A = 2\mathbb{Z}$ فإن:
$(A, +)$ زمرة تبديلية والحيادي هو (0)
$(A, \cdot)$ ليست زمرة.

الحقل:
⊙ نقول عن البنية الجبرية $(F, +, \cdot)$ إنها حقل إذا وفقط إذا تحقق:
1) $(F, +)$ زمرة تبديلية
2) $(F^*, \cdot)$ زمرة تبديلية حيث $F^* = F \setminus \{0\}$
3) $\cdot$ يقبل التوزيع على + أي:
$\forall a, b, c \in F : a(b+c) = ab + ac$
$(b+c)a = ba + ca$

مثال:
اذا كانت $F = \mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد الناطقة.
$(F, +, \cdot)$ حقل لأن $(F, +)$ زمرة تبديلية، $(F^*, \cdot)$ زمرة تبديلية
الضرب يقبل التوزيع على +

الفصل الثاني

2: جبر المصفوفات:
لتكن A مصفوفة من المرتبة $m \times n$ مكونة من حقل F نرمز لها بالرمز A ونرمز للمجموعة كل المصفوفات من المرتبة $m \times n$ والمكونة من حقل F بالرمز $M_{m\times n}(F)$ لتكن $A \in M_{m\times n}(F)$
1) A تسمى مصفوفة مربعة من المرتبة n إذا وفقط إذا تحقق $m = n$
2) A تسمى مصفوفة صفرية اذا كان $a_{ij} = 0$ ، $A = (a_{ij}) : i \in \{1, \dots, m\}$ ، $j \in \{1, \dots, n\}$

/ /

③ A تسمى مصفوفة قطرية اذا كان جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي.

④ A تسمى مصفوفة واحدية اذا كان جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي كلها تساوي الواحد.

⑤ A تسمى مصفوفة مثلثية عليا اذا كانت كل العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي أصفار.

⑥ A تسمى مصفوفة مثلثية دنيا اذا كانت كل العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي أصفار.

تعريف:

لتكن $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ نسمي التحويلات التالية

① الإبدال بين سطر/عمود وسطر/عمود/

② ضرب سطر/عمود بعنصر غير صفري من الحقل F

③ جمع سطر/عمود الى مضاعف جداء عنصر غير صفري من الحقل F بسطر/عمود آخر

تحويلات أولية سطرية

① $R_i \longrightarrow R_j$ ② $R_i \longrightarrow \lambda R_i$: $\lambda \neq 0 \in F$

③ $R_i \longrightarrow \lambda R_j + R_i$ $0 \neq \lambda \in F$

تحويلات أولية عمودية:

① $C_i \longrightarrow C_j$ ② $0 \neq \lambda \in F : C_i \longrightarrow \lambda C_j$

③ $0 \neq \lambda \in F : C_i \longrightarrow C_i + \lambda C_j$

تعريف: لتكن $A, B \in M_n(F)$. A تكافئ B اذا وفقط اذا كانت احداهما تنتج من الأخرى بإجراء عدد منتهٍ من التحويلات السطرية أو العمودية ونرمز لها $A \sim B$

* اذا كانت تحويلات سطرية نقول متكافئتان سطرية.

" " عمودية " " عمودية

/ /

مثال: أثبت أن المصفوفتين التاليتين متكافئتان:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

الحل:

$$A \xrightarrow{R_2 \to R_2+2R_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 5\\ -1 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow A \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

$$A = B$$

تمرين: بين أن المصفوفتين متكافئتان:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 6 & 4\\ 2 & -5 & 0\\ 9 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & -2\\ 8 & 11 & 4\\ 35 & 27 & 17\end{pmatrix}$$

غير متكافئتين

تعريف: لتكن $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(F)$ مصفوفة من الرتبة $m\times n$ ومعرفة على حقل (F)
تسمى A مصفوفة مدرجة إذا تحققت الشروط التالية.

1: العنصر الأول في كل سطر غير صفري هو 1 ويسمى الرائد.

2: العنصر الأول في السطر الغير صفري يقع على يمين العنصر الرائد في السطر الذي تسبقه.

3: الأسطر الغير صفرية تسبق الأسطر الصفرية.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ مدرجة

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to$$ ليست مدرجة

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to$$ ليست مدرجة