/ /

المحاضرة السابقة:

حصلنا على جملة معادلات خطية في المجاهيل C_k الثوابت.

$$\psi(t) = h(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t)$$

هذه الجملة يمكن كتابتها بالشكل: باستخدام دالة الربط δ

$$\sum_{k=1}^{n} (\delta_{km} - \lambda a_{mk}) C_k = h_k$$

نأخذ معين الأمثال لهذه الجملة:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (1-\lambda a_{11}) & -\lambda a_{12} & -\lambda a_{13} \\ -\lambda a_{21} & (1-\lambda a_{22}) & -\lambda a_{23} \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & (1-\lambda a_{nn}) \end{vmatrix}$$

- المناقشة:

(1) إذا كان $\Delta(\lambda) \neq 0$ عندئذٍ يكون لمجموعة المعادلات الجبرية السابقة حلاً وحيداً $C_1, C_2, \dots, C_n$ وبالتالي هذا بدوره يؤدي إلى أن المعادلة التكاملية لفريدهولم من النوع الثاني الغير متجانسة حلاً وحيداً يعطى بالصيغة التالية:

$$\boxed{\psi(x) = h(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x)}$$

إذاً حل المعادلة التكاملية لها حلاً وحيداً في حال معين الأمثال $\neq 0$ يعطى بالصيغة السابقة.

(2) $\Delta(\lambda) = 0$ فالقيم الناتجة لـ λ تسمى قيم مميزة وبالتالي لا يوجد لمجموعة المعادلات الجبرية الخطية السابقة أي حل أو عدد غير منتهٍ من الحلول

مثال: ناقش وجود شروط الحل للمعادلة التكاملية التالية:

$$\psi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x^2\cos t + x\sin t)\,\psi(t)\,dt = \cos x$$

باستخدام النواة المتفسخة، وإذا كان الجواب بالإيجاب فعندئذٍ أوجد حلها دراسة جميع الحالات الواردة.

الحل:

$$K(x,t) = x^2\cos t + x\sin t \quad , h(x) = \cos x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |k(x,t)|^2\,dx\,dt = \frac{2\pi^6}{5} + \frac{2\pi^4}{3} < \infty$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |k(x,t)|^2\,dx = \frac{2\pi^5}{5}\cos^2 t + \frac{2\pi^3}{3}\sin^2 t < \infty$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |k(x,t)|^2\,dt = \pi x^4 + \pi x^2 < \infty$$

$$a_1(x) = x^2 \qquad b_1(t) = \cos t$$

$$a_2(x) = x \qquad b_2(t) = \sin t$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = -x^2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ع الشروط محققة والاستقلال موجود ع يمكن إيجاد الحل

- الآن لإيجاد الحل يجب تعيين (h , c)

$$h_1 = \int_a^b b_1(t)h(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cdot \cos t\,dt = \pi$$

$$h_2 = \int_a^b b_2(t)h(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cdot \sin t\,dt = 0$$

$$a_{11} = \int_a^b b_1(t)a_1(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cdot t^2\,dt = 4\pi \quad \times$$

/ /

$$a_{12} = \int_a^b b_1(t)\,a_2(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cdot t\,dt = 0$$

$$a_{21} = \int_a^b b_2(t)\,a_1(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cdot t^2\,dt = 0$$

$$a_{22} = \int_a^b b_2(t)\,a_2(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cdot t\,dt = 2\pi$$

نكتب معين الأمثال:

ان المعادلات التي تحدد c_k هي:

$$(1-4\pi\lambda)c_1 = \pi$$
$$(1-2\lambda\pi)c_2 = 0$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-4\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1-2\lambda\pi \end{vmatrix} = (1-2\pi\lambda)(1-4\pi\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 = \frac{1}{4\pi}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2\pi}}_{\text{القيم المميزة}}$$

القيم المميزة.

"المناقشة"

$\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$ (1)

$$c_1 = \frac{\pi}{1-4\pi\lambda}, \quad c_2 = 0$$

نعوض في صيغة الحل:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda c_1 a_1(x) + \lambda c_2 a_2(x)$$

$$\psi(x) = \cos x + \frac{\lambda\pi}{1-4\pi\lambda}\, x^2$$

$\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{4\pi}$ (2)

$$\left(1-4\pi \frac{1}{4\pi}\right)c_1 = \pi$$
$$\left(1-2\pi \frac{1}{4\pi}\right)c_2 = 0$$

/ /

$$(1-1)C_1 = \pi \Rightarrow 0.C_1 = \pi$$
$$(1-\tfrac{1}{2})C_2 = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2}C_2 = 0 \quad C_2 = 0$$
$\Rightarrow$

مستحيلة الحل

أي لا يوجد أي حل للمعادلة التكاملية .

(٢) $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2\pi}$

$$(1-4\pi\,\tfrac{1}{2\pi})C_1 = \pi \Rightarrow (1-2)C_1 = \pi$$
$$(1-2\pi\cdot\tfrac{1}{2\pi})C_2 = 0 \Rightarrow (1-1)C_2 = 0$$

$$-C_1 = \pi \Rightarrow \boxed{C_1 = -\pi}$$
$$0.C_2 = 0 \Rightarrow 0.C_2 = 0$$

$\Leftarrow$ لها عدد غير منته من الحلول :

C_2 ثابت كيفي $\Rightarrow \boxed{C_2 = A}$

• بالتالي يكون حل المعادلة التكاملية :

$$\psi(x) = \cos x + Ax - \pi x^2$$

/ /

المعادلة التكاملية المتجانسة لفريدهولم:

إن معادلة فريدهولم من الشكل:

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\psi(t)\,dt = 0$$

$$\sum (\delta_{km} - \lambda a_{km})c_m = 0 \quad , (k = \overline{1,n})$$

بإجراء نفس الخطوات السابقة.

المناقشة:

(1) λ ليست قيمة مميزة للنواة $k(x,t) \Leftarrow \Delta(\lambda) \neq 0$

عندئذ يوجد حل وحيد هو الحل الصفري (التافه)

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

$$\psi(x) = 0$$

(2) λ قيمة مميزة للنواة $k(x,t) \Leftarrow \Delta(\lambda) = 0$ سيكون لمجموعة المعادلات الجبرية الخطية عدد غير منته من الحلول . وعندئذ نقابل كل حل بشعاع $\vec{c}$ مركباته $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots c_n)$ ومجموعة هذه الحلول تشكل فضاء متجهياً يسمى بفضاء الحلول ، وهذا الفضاء يكون منتهي البعد ونرمزه $E(\lambda)$ وعندئذ: $\dim E(\lambda) = P$

بعد الفضاء $E(\lambda)$

وهذا يعني وجود P حلاً مستقلاً خطياً لمجموعة المعادلات الجبرية سيوجد قاعدة لفضاء الحلول تتكون من P متجهاً مستقلاً

$$\underbrace{\vec{c}^{(1)}, \vec{c}^{(2)}, \vec{c}^{(3)} \dots}_{c_p}$$

وإن أي حل هو تركيب خطي لمتجهات القاعدة ولنوضح هذه الفكرة من خلال المثال التالي:

/ /

لتكن لدينا مجموعة المعادلات الآتية :

$$C_1 \quad C_2 + 2C_3 = 0$$
$$2C_1 + C_2 - C_3 = 0$$
$$-3C_1 - 3C_2 + 4C_3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

حل غير الحل الصفري .

$$C_2 = -5C_1$$
$$C_3 = -3C_1$$
$$C_1 = -P \qquad (\text{وسيطاً } P)$$

نفرض:

$$\left.\begin{array}{l} C_2 = 5P \\ C_3 = 3P \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ح} = (C_1, C_2, C_3)$$
$$= (-P, 5P, 3P)$$

$$P\underbrace{(-1, 5, 3)}_{\text{متجه القاعدة}}$$

وهذا يعني أن بعد الفضاء هو (1) لأن لدينا وسيط واحد هو P

ملاحظة :

1. ان حل معادلة فريدهولم التكاملية لا يكتمل الا اذا درسنا المعادلة التكاملية المنقولة المرافقة لها وذلك للتمكن من الحديث عن مبرهنة فريدهولم

/ /

مثال: حل المعادلة التكاملية التالية المتجانسة:

$$\psi(x) - \lambda \int_0^1 (3x-2)\, t\, \psi(t)\, dt = 0$$

$a_1(x) = 3x \quad \Big| \quad b_1(t) = t$

$a_2(x) = 1 \quad \Big| \quad b_2(t) = -2t$

مرتبطين ببعض لا يحقق شرط الاستقلال

أمكن كتابتها على شكل جداء من حدود

الشروط محققة (يجب التحقق).

هذا الحل سيعتبر لو كان خاطئ

$a_{11} = \int_0^1 3.t.t\, dt = 1$

$a_{12} = \frac{1}{2}$

$a_{21} = \int_0^1 (-2t)(3t)\, dt = 3$

$a_{22} = -1$

$(1-\lambda)\, c_1 - \frac{\lambda}{2}\, c_2 = 0$

$2\lambda c_1 + (1+\lambda)\, c_2 = 0$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ 2\lambda & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

$(1-\lambda)(1+\lambda) - \left(\frac{\lambda}{2}\right)(2\lambda) = 1 \neq 0$

ـ حلاً وحيداً وهو الحل الصفري ـ لا يوجد قيم مميزة.

/ /

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x^2\cos t + x\sin t)^2\,dx\,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x^4\cos^2 t + x^2\sin^2 t + 2x^3\cos t\sin t)\,dx\,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{5}x^5\cos^2 t + \frac{1}{3}x^3\sin^2 t + \frac{1}{2}x^4\cos t.\sin t\right]_{-\pi}^{\pi} dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\frac{1}{5}(\pi)^5\cos^2 t + \frac{1}{3}(\pi)^3\sin^2 t + \frac{1}{2}(\pi)^4\cos t.\sin t\right) - \left(\frac{1}{5}(-\pi)^5\cos^2 t\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{3}(-\pi)^3\sin^2 t + \frac{1}{2}(-\pi)^4\cos t.\sin t\right)\right] dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\pi^5}{5}\cos^2 t + \frac{\pi^3}{3}\sin^2 t + \underline{\frac{\pi^4}{2}\cos t.\sin t} + \frac{\pi^5}{5}\cos^2 t + \frac{\pi^3}{3}\sin^2 t\right.$$

$$\left. - \underline{\frac{\pi^4}{2}\cos t\cdot\sin t}\right] dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[2\frac{\pi^5}{5}\cos^2 t + 2\frac{\pi^3}{3}\sin^2 t\right] dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[2\,\frac{\pi^5}{5}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) + \frac{2\pi^3}{3}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)\right] dt$$

$$= 2\frac{\pi^5}{5}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\,dt + \frac{2\pi^3}{3}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\,dt$$

$$= \frac{2\pi^5}{5}\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2\pi^3}{3}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{2\pi^5}{5}\left[\left(\frac{1}{2}(\pi) + \underbrace{\frac{1}{4}\sin(2\pi)}_{0}\right) - \left(\frac{1}{2}(-\pi) + \underbrace{\frac{1}{4}\sin(-2\pi)}_{0}\right)\right] + \frac{2\pi^3}{3}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}(\pi) - \underbrace{\frac{1}{4}\sin(2\pi)}_{0}\right) - \left(\frac{1}{2}(-\pi) - \underbrace{\frac{1}{4}\sin(-2\pi)}_{0}\right)\right]$$

$= 2\frac{\pi^5}{5}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] + 2\frac{\pi^3}{3}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]$

$= 2\frac{\pi^5}{5}\left(\frac{2\pi}{2}\right) + 2\frac{\pi^3}{3}\left(\frac{2\pi}{2}\right)$

$= 2\frac{\pi^6}{5} + 2\frac{\pi^4}{3}$ مطلوب

$\int_0^1 \sin(\ln t)\,dt$

نفرض $\ln t = x \Rightarrow \frac{1}{t}\,dt = dx \Rightarrow dt = t\,dx$

$t = e^x \qquad \Rightarrow dt = e^x\,dx$

$\int_{-\infty}^{0} \underbrace{\sin(x)}_{u}\,\underbrace{e^x}_{dv}$

$= \left[\sin(x).e^x\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \underbrace{\cos(x)}_{u}\,\underbrace{e^x\,dx}_{dv}$

$= \left[\sin(x).e^x\right]_{-\infty}^{0} - \left[\cos x.e^x\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}\sin(x)\,e^x\,dx$

$I = \left[\sin(x)\,e^x\right]_{-\infty}^{0} - \left[\cos x.e^x\right]_{-\infty}^{0} - I$

$2I = (0-1) \Rightarrow 2I = -1 \Rightarrow I = -\frac{1}{2}$