كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق
السنة : الثانية
المقرر : تحليل (3)
الفصل : الأول
المحاضرة : (6)
التاريخ : 2013/10/27

إن $f(x)$ تابع قابل للإشتقاق عدداً لا نهائياً من المرات بجوار α ..

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

(وإن المقصود بالرمز (~) هو أن متسلسلة تايلور المذكورة في الطرف الأيمن توافق التابع $f(x)$ بجوار α)

ـ إذا تحول الرمز ~ إلى مساواة =

فإننا نحصل على العلاقة التالية :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

وهذا يعني أن التابع $f(x)$ قد نشر بجوار النقطة α في متسلسلة تايلور .

الآن سنقوم بنشر بعض التوابع :

1) ـ نشر التابع $f(x) = \sin x$ بجوار الصفر .

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \forall x \in \,]-\infty, +\infty[$$

ملاحظة :

اخترنا في الحد العام (2n+1) ولم نختر (2n-1) لأنه كما نلاحظ المتسلسلة تبدأ من الصفر

وإن n=0 في المتسلسلة لأن المركز مساوٍ للصفر (النشر بجوار الصفر ⟸ α = 0) .

ملاحظة :

ـ عندما نريد إيجاد مجال التقارب ونكون أمام متسلسلة لا تحوي كل القيم أي أنه كما في المتسلسلة السابقة والتي تحتوي فقط على القيم الفردية ,,

عندها لا يمكن تطبيق القانون :

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

إنما نطبق دستور دلامبير الأساسي .

وفي المنشور السابق لو أردنا حساب مجال التقارب فإننا نقوم بتطبيق دستور دلامبير على النحو التالي :

$$\begin{aligned}D&=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}.x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}.x^{2n+3}}{(2n+3)!}\times\frac{(2n+1)!}{(-1)^n.x^{2n+1}}\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n.(-1)^1\times x^{2n}.x^3\times(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!\times(-1)^n\times x^{2n}.x^1}\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1).x^2}{(2n+3)(2n+2)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}\times x^2=0\times x^2\\&=0\ <1\ \ ;\ (\forall x)\ \epsilon\ ]-\infty,+\infty[\end{aligned}$$

نتائج :

1) ـ لا يتغير نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى إذا قمنا باشتقاقها حدّاً فحدّاً .
2) ـ لا يتغير نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى إذا قمنا بمكاملتها حدّاً فحدّاً .

والآن سنعرض مثال على هذه النتائج باستنتاج منشور $\cos x$ من منشور $\sin x$

2) ـ نشر التابع $f(x)=\cos x$ بجوار الصفر .

ـ نشتق منشور $\sin x$ فنجد :

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\mp\cdots+(-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\qquad ;\ \forall\ x\ \epsilon\ ]-\infty,+\infty[$$

و هو منشور $\cos x$ كما نلاحظ أن نصف قطر التقارب لم يتغير ..

ـ نكامل منشور $\sin x$ فنجد :

$$-\cos x + k = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \mp \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^n . \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \cdots \quad (*)$$

نعوض بـ (0)

$$-1 + k = 0 + 0 + 0 + \cdots \;\Rightarrow -1 + k = 0 \Rightarrow k = 1$$

نعوض k في المعادلة (*)

$$\Rightarrow -\cos x + 1 = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots \Rightarrow -\cos x = -1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\xRightarrow{\times(-1)} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad ; \forall\, x \in]-\infty, +\infty[$$

وبذلك نكون قد حصلنا بالمكاملة على منشور $\cos x$ ولم يتغير نصف قطر المقاربة .

3) ـ نشر التابع $f(x) = e^x$ بجوار الصفر .

$$f(x) = e^x \;\Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \;\Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \;\Rightarrow f''(0) = 1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^n(x) = e^x \;\Rightarrow f^n(0) = 1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

وبالتالي :

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ; \forall\, x \in]-\infty, +\infty[$$

ولو عوضنا $(x=1)$ لوجدنا :

$$\Rightarrow e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \Rightarrow e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \quad ; \forall\, x \in\,]-\infty,+\infty[$$

إذاً المتسلسلة متقاربة ولها مجموع ,, ومجموعها (e).

ملاحظة :

في المنشور السابق لم نكتب $f(x)\sim\sum$ لأنه في التوابع الشهيرة تكون دوماً الشروط محققة فنكتب مباشرة $f(x)=\sum$.

ومنه يمكن أن نحسب الآن منشور e^{-x} :

$$e^{-x} = 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad ; \forall x \in\,]-\infty,+\infty[$$

4) - نشر التابع $f(x)=\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ بجوار الصفر .

وهو فرق منشوري e^x ومنشور e^{-x} أي أنه :

$$e^x-e^{-x} = \begin{cases} e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \\ - \\ e^{-x} = 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sinh x = \frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) = \frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$;\forall x \in\,]-\infty,+\infty[$$

5) - نشر التابع $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ بجوار الصفر .

وهو مجموع منشوري e^x ومنشور e^{-x} أي أنه :

$$e^x + e^{-x} = \begin{cases} e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ + \\ e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$; \forall x \in \,]-\infty, +\infty[$$

6) - نشر التابع $f(x) = \frac{1}{1-x}$ بجوار الصفر .

نكتب التابع على شكل متسلسلة مركزها الصفر ..

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

بشرط : $|x| < 1$

أي : $\forall\, x \in \,]-1, +1[$

7) - نشر التابع $f(x) = \frac{1}{1+x}$ بجوار الصفر .

إن منشور هذا التابع ينتج مباشرة من منشور التابع $f(x) = \frac{1}{1-x}$ وذلك بتعويض كل x بـ $-x$

أي المنشور له الشكل :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n . x^n + \cdots$$

بشرط : $|x| < 1$

أي : $\forall\, x \in \,]-1, +1[$

8) - نشر التابع $f(x) = \ln(1+x)$ بجوار الصفر .

لدينا :

$$f(x) = \ln(1+x) \implies f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad ; \forall\, x\epsilon\,]-1,+1[$$

وبالتالي منشور مشتق التابع $f(x)$ هو :

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n . x^n + \cdots$$

وبالمكاملة نجد :

$$\ln(1+x) + k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \qquad (*)$$

وبتعويض $(x = 0)$ في المعادلة $(*)$ نجد :

$$\ln(1+0) + k = 0 + 0 + 0 + \cdots \implies 0 + k = 0 \implies k = 0$$

نعوض الآن قيمة k في المعادلة $(*)$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$\forall\, x\, \epsilon\,]-1,+1[$$

... انتهت المحاضرة (6) ...