كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق | السنة : الثالثة

المقرر : البنى الجبرية (3) | الفصل : الأول

المحاضرة : (7) | التاريخ : 2013/10/27

مبرهنة (تدريب) :

إذا كان :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\propto"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[d, "\delta"'] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D'
\end{tikzcd}$$

مخططا تبادليا من التشاكلات المودولية .

كل سطر فيه عبارة عن متتالية تامة عندئذ :

1ـ إذا كان γ , $\propto$ غامرين و δ متباين فإن β غامر.

2ـ إذا كان δ , β متباينين و $\propto$ غامر فإن γ متباين .

الإثبات :

1ـ أيا كان $b' \in B'$ عندئذ $g'(b') \in C'$, وكون γ غامر فإنه يوجد $c \in C$ بحيث :

$$(1) \ \ldots \ \ g'(b') = \gamma(c)$$

وبما أن h' تطبيق فإن : $h'\big(g'(b')\big) = h'\big(\gamma(c)\big)$

وبما أن السطر السفلي متتالية تامة فإن : $h'\big(\gamma(c)\big) = 0$

وبما أن المخطط تبادلي فإن : $h'\big(\gamma(c)\big) = \delta\big(h(c)\big) = 0$

وبما أن δ متباين فإن : $h(c) = 0$ وبالتالي :

$$\overbrace{c \in kerh = Img}^{\text{السطر العلوي متتالية تامة}} \Longrightarrow \exists\, b \in B \ : \ c = g(b) \overset{(1)}{\Longrightarrow} g'(b') = \gamma\big(g(b)\big)$$

$$\overset{\text{المخطط تبادلي}}{\Longrightarrow} \quad g'(b') = g'\big(\beta(b)\big) \Longrightarrow g'\big(b' - \beta(b)\big) = 0 \Longrightarrow b' - \beta(b) \in kerg' = Imf'$$

$$\Longrightarrow \exists\, a' \in A' : f'(a') = b' - \beta(b) \overset{\propto\ \text{غامر}}{\Longrightarrow} \exists\, a \in A \ : \ a' = \propto(a)$$

$$\Rightarrow f'(\propto(a)) = b' - \beta(b) \overset{\text{المخطط تبادلي}}{\Longrightarrow} \beta(f(a)) = b' - \beta(b)$$

$$\Rightarrow b' = \beta(f(a) + b) \in ImB \Rightarrow \beta \text{ غامر}$$

2ـ أيا كانت $c \in ker\gamma$ فإن $\gamma(c) = 0 \;\ldots\; (1)$

$$\overset{h' \text{ تشاكل}}{\Longrightarrow} h'(\gamma(c)) = 0 \overset{\text{المخطط تبادلي}}{\Longrightarrow} \delta(h(c)) = 0 \overset{\delta \text{ متباين}}{\Longrightarrow} h(c) = 0 \Rightarrow \overbrace{c \in kerh = Img}^{\text{السطر العلوي متتالية تامة}}$$

$$\Rightarrow \exists\, b \in B \;:\; c = g(b) \ldots (2) \overset{(1)}{\Longrightarrow} \gamma(g(b)) = 0 \overset{\text{المخطط تبادلي}}{\Longrightarrow} g'(\beta(b)) = 0 \Rightarrow$$

$$\beta(b) \in kerg' = Imf' \Rightarrow \exists\, a' \in A' : \beta(b) = f'(a') \overset{\propto \text{ غامر}}{\Longrightarrow} \exists\, a \in A \;:\; \propto(a) = a'$$

$$\Rightarrow \beta(b) = f'(\propto(a)) \overset{\text{المخطط تبادلي}}{\Longrightarrow} \beta(b) = \beta(f(a))$$

$$\overset{\beta \text{ متباين}}{\Longrightarrow} b = f(a) \overset{(2)}{\Longrightarrow} \overbrace{c = g(f(a)) = 0}^{\text{كون المتتاية تامة}} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \gamma \text{ متباين}$$

نتيجة :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta_2"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta_3"'] & D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\beta_4"'] & E \arrow[d, "\beta_5"'] \\
A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \arrow[r, "k'"] & E'
\end{tikzcd}$$

يمكن أن نقول أن β_3 غامر

إذا كان β_4 , β_2 غامرين و β_5 متباين

ويمكن أن نقول إن β_3 متباين

إذا كان β_4 , β_2 متباينين و β_5 غامر

وإذا كان β_5 , β_4 , β_2 , β_1 تماثلات يكون β_3 تماثل .

المحاضرة (7)

التشاكلات المستخلصة :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, "fov"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} & M \\ A \arrow[ur, "vof"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

$$f_*: Hom(M,A) \longrightarrow Hom(M,B) \qquad f^*: Hom(B,M) \longrightarrow Hom(A,M)$$

$$v \longmapsto fov \qquad\qquad v \longmapsto vof$$

$$\underbrace{f_*(v) = fov}_{\text{مستخلص سفلي}} \qquad\qquad \underbrace{f^*(v) = vof}_{\text{مستخلص علوي}}$$

من أجل كل تشاكل يمكن أن نعرف f_* , f^* .

بالنسبة للمتتاليات التامة : إذا كانت لدينا المتتالية التامة :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

يمكن أن نستخلص منها :

1- $$0 \longrightarrow Hom(M,A) \xrightarrow{f_*} Hom(M,B) \xrightarrow{g_*} Hom(M,C)$$

هل هذه المستخلصة تامة ؟؟

2- $$0 \longrightarrow Hom(C,M) \xrightarrow{g^*} Hom(B,M) \xrightarrow{f^*} Hom(A,M)$$

هل هذه المستخلصة تامة ؟؟

نتابع المناقشة في المحاضرة التالية ...

... انتهت المحاضرة السابعة ...