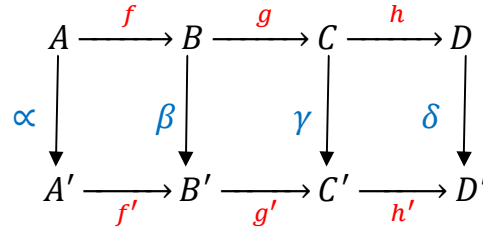


مبرهنة (تدريب):



إذا كان:

مخططا تبادليا من التشاكلات المودولية .

كل سطر فيه عبارة عن متتالية تامة عندئذ :

1- إذا كان α, γ غامرين و δ متباين فإن β غامر.

2- إذا كان δ, β متباينين و α غامر فإن γ متباين .

الإثبات:

1- أيا كان $b' \in B'$ عندئذ $g'(b') \in C'$, وكون γ غامر فإنه يوجد $c \in C$ بحيث :

$$(1) \dots g'(b') = \gamma(c)$$

وبما أن h' تطبيق فإن : $h'(g'(b')) = h'(\gamma(c))$

وبما أن السطر السفلي متتالية تامة فإن : $h'(\gamma(c)) = 0$

وبما أن المخطط تبادلي فإن : $h'(g'(b')) = \delta(h(c)) = 0$

وبما أن δ متباين فإن : $h(c) = 0$ وبالتالي :

السطر العلوي متتالية تامة

$$\overline{c \in \ker h = \text{Im} g} \Rightarrow \exists b \in B : c = g(b) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} g'(b') = \gamma(g(b))$$

المخطط تبادلي

$$\Rightarrow g'(b') = g'(\beta(b)) \Rightarrow g'(b' - \beta(b)) = 0 \Rightarrow b' - \beta(b) \in \ker g' = \text{Im} f'$$

$$\Rightarrow \exists a' \in A' : f'(a') = b' - \beta(b) \stackrel{\text{غامر } \alpha}{\Rightarrow} \exists a \in A : a' = \alpha(a)$$

المحاضرة (7)

$$\Rightarrow f'(\alpha(a)) = b' - \beta(b) \xrightarrow{\text{المخطط تبادلي}} \beta(f(a)) = b' - \beta(b)$$

$$\Rightarrow b' = \beta(f(a) + b) \in \text{Im}B \Rightarrow \beta \text{ غامر}$$

2- أيا كانت $c \in \text{kery}$ فإن $\gamma(c) = 0 \dots (1)$

$$\xrightarrow{h' \text{ تشاكل}} h'(\gamma(c)) = 0 \xrightarrow{\text{المخطط تبادلي}} \delta(h(c)) = 0 \xrightarrow{\delta \text{ متباين}} h(c) = 0 \xrightarrow{\text{السطر العلوي متتالية تامة}} c \in \text{ker}h = \text{Im}g$$

$$\Rightarrow \exists b \in B : c = g(b) \dots (2) \xrightarrow{(1)} \gamma(g(b)) = 0 \xrightarrow{\text{المخطط تبادلي}} g'(\beta(b)) = 0 \Rightarrow$$

$$\beta(b) \in \text{ker}g' = \text{Im}f' \Rightarrow \exists a' \in A' : \beta(b) = f'(a') \xrightarrow{\alpha \text{ غامر}} \exists a \in A : \alpha(a) = a'$$

$$\Rightarrow \beta(b) = f'(\alpha(a)) \xrightarrow{\text{المخطط تبادلي}} \beta(b) = \beta(f(a))$$

$$\xrightarrow{\beta \text{ متباين}} b = f(a) \xrightarrow{(2)} \overbrace{c = g(f(a))}^{\text{كون المتتالية تامة}} = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \gamma \text{ متباين}$$

نتيجة:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{k} & E \\ \beta_1 \downarrow & & \beta_2 \downarrow & & \beta_3 \downarrow & & \beta_4 \downarrow & & \beta_5 \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{k'} & E' \end{array}$$

يمكن أن نقول أن β_3 غامر

إذا كان β_2, β_4 غامرين و β_5 متباين

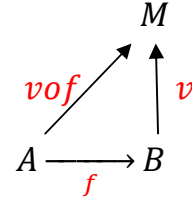
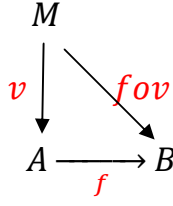
ويمكن أن نقول إن β_3 متباين

إذا كان β_2, β_4 متباينين و β_5 غامر

وإذا كان $\beta_1, \beta_2, \beta_4, \beta_5$ تماثلات يكون β_3 تماثل.

المحاضرة (7)

التشاكلات المستخلصة:



$$f_*: \text{Hom}(M, A) \longrightarrow \text{Hom}(M, B) \quad f^*: \text{Hom}(B, M) \longrightarrow \text{Hom}(A, M)$$

$$v \mapsto f \circ v$$

$$v \mapsto v \circ f$$

$$\underbrace{f_*(v) = f \circ v}_{\text{مستخلص سفلي}}$$

$$\underbrace{f^*(v) = v \circ f}_{\text{مستخلص علوي}}$$

من أجل كل تشاكل يمكن أن نعرف f_* , f^* .

بالنسبة للمتتاليات التامة: إذا كانت لدينا المتتالية التامة:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

يمكن أن نستخلص منها:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M, A) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(M, B) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(M, C) \quad -1$$

هل هذه المستخلصة تامة؟؟

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(C, M) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(B, M) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(A, M) \quad -2$$

هل هذه المستخلصة تامة؟؟

نتابع المناقشة في المحاضرة التالية ...

... انتهت المحاضرة السابعة ...