المحاضرة التاسعة 3/11/2013

مبرهنة مهمة

نفرض $\{z_n = x_n + iy_n\}$ متتالية عقدية، $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$

عندئذٍ نقول عن $\{z_n\}$ أنها متقاربة من a إذا وفقط إذا كانت متتاليتا الأجزاء الحقيقية والتخيلية لـ $\{z_n\}$ متقاربتان من الجزء الحقيقي والتخيلي لـ a أي:

تقارب عقدي — تقارب حقيقي

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \iff x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \ \wedge\ y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$$

الإثبات: $(\Rightarrow)$ بما أنّ $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ عندئذٍ:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) > 0 ; \forall n \geqslant n(\varepsilon) : |z_n - a| < \varepsilon$$

عندئذٍ:

تتحول إلى مساواة إذا كان العدد حقيقي

$$|x_n - \alpha| = |Re(z_n - a)| \leqslant |z_n - a| < \varepsilon$$

وأيضاً:

$$|y_n - \beta| = |Im(z_n - a)| \leqslant |z_n - a| < \varepsilon$$

وبالتالي:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \ \wedge\ y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$$

$(\Leftarrow)$ بما أنّ $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$ عندئذٍ:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_1(\varepsilon) > 0 ; \forall n \geqslant n_1(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وبما أنّ $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$ عندئذٍ:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_2(\varepsilon) > 0 ; \forall n \geqslant n_2(\varepsilon) \Rightarrow |y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومنه:

$$\forall n > 0 : \exists n(\varepsilon) = \max(n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)) > 0 ; \forall n \geqslant n(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$|z_n - a| = |(x_n + iy_n) - (\alpha + i\beta)| = |(x_n - \alpha) + i(y_n - \beta)|$$

$|i| = 1$

$$\leqslant |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ومنه $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

تمرين: ادرس تقارب المتتاليات التالية:

$\boxed{1}$ $\{n^2 + \frac{n-1}{n+1} i\}$

نلاحظ أنّ: $x_n = n^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ وبالتالي:

أي $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ $\{z_n\}$ متباعدة

$\boxed{2}$ $\left\{\frac{e^{in}}{n+1}\right\}$

نلاحظ أنّ: $z_n = \frac{e^{in}}{n+1}$

$= \frac{\cos n}{n+1} + i \frac{\sin n}{n+1}$

$\frac{\cos n}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $\frac{\sin n}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

وبالتالي: $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ والمتتالية متقاربة.

$\boxed{3}$ $\left\{\frac{n^7+2}{e^n} + \frac{\ln n}{n} i\right\}$

$x_n = \frac{n^7+2}{e^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ حسب لوبيتال

$y_n = \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ حسب لوبيتال

ومنه: $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ والمتتالية متقاربة

$\boxed{4}$ $z_n = \left\{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{3n^2+1}{n^2+n+2}\right\}$

$x_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ln e = 1$

$$y_n = \frac{3n^2+1}{n^2+n+2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{3}{1} = 3$$

ومنه:

$$z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 + 3i$$

والمتتالية متقاربة.

مبرهنة: بفرض $\{z_n\}$ متتالية عقدية و $a \in \mathbb{C}$ عندئذٍ:

$$z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a \iff |z_n - a| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

الإثبات: $(\Rightarrow)$

بما أنّ $\{z_n\}$ متقاربة من a عندئذٍ:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) > 0 \, ; \, \forall n \geq n(\varepsilon) : |z_n - a| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \big| |z_n - a| - 0 \big| < \varepsilon$$

ومنه $\{|z_n - a|\}$ تتقارب من الصفر.

$(\Leftarrow)$ بما أنّ $\{|z_n - a|\}$ متقاربة من الصفر $\Leftarrow$

$\big||z_n - a| - 0\big| < \varepsilon$ ومنه $|z_n - a| < \varepsilon$

حالة خاصة:

عندما $a = 0$ يكون:

$$z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \iff |z_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

مبرهنة: بفرض $\{z_n\}$ متتالية عقدية و $a \in \mathbb{C}$ عندئذٍ:

$$z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a \Rightarrow |z_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} |a|$$

العكس غير صحيح

وكمثال على ذلك

المتتالية $\{i^n\}$ حيث نجد ما يلي:

$$|i^n| = |i|^n = 1^n = 1$$

$$|z_n| \to |1|$$

ولكن

$$z_n \not\to a$$

الإثبات: بما أنّ $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ عندئذٍ:

$$\forall \varepsilon>0 : \exists n(\varepsilon)>0 ; \forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - a|<\varepsilon$$

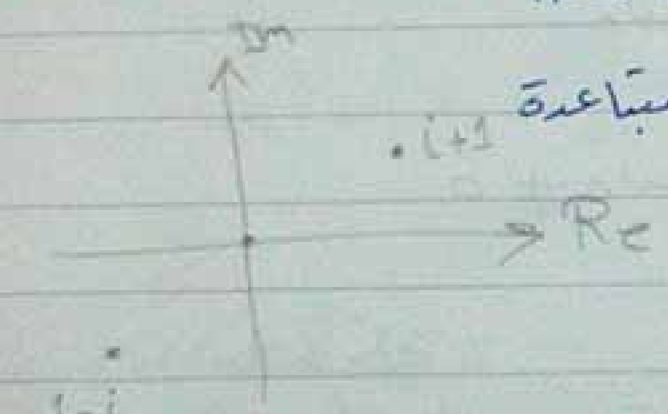
ولدينا المتراجحة

$$||z_n|-|a|| \leq |z_n - a|$$

ومنه $||z_n|-|a||<\varepsilon$

أمثلة: إنّ المتتالية $\{i^n\}$ متباعدة لأنّ

$$|i^n| = |i|^n = 1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$



كذلك المتتالية $\{(-1)^n(1+i)\}$ متباعدة لأنّ:

$$|(-1)^n(1+i)| = \sqrt{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2}$$

مبرهنة: نهاية متتالية عقدية إن وُجدت فهي وحيدة.

الإثبات: لتكن $\{z_n\}$ متتالية عقدية متقاربة ولنفرض أنّ لها نهايتين $a,b\in\mathbb{C}$ عندئذٍ:

$$\forall n\in\mathbb{N} : |a-b| \leq |z_n-a|+|z_n-b| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0+0=0$$

ولدينا $|a-b|\geq 0$ ومنه:

$$|a-b|=0$$
$$\Rightarrow a=b$$

مبرهنة: إذا كانت $\{z_n\}$ متتالية عقدية متقاربة وكانت $\{w_n\}$ متتالية جزئية من $\{z_n\}$ وكانت $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ عندئذٍ: $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

ملاحظة:

في هذه البرهنة يجب أن تكون $\{z_n\}$ متقاربة فلو أخذنا المتتالية $\{w_n\}=\{1\}$ نجد أن $\{w_n\}$ متقاربة وجزئية من $\{z_n\}=\{i^n\}$ ولكن $\{z_n\}$ متباعدة.

مبرهنة

بفرض $\{w_n\}$ ، $\{z_n\}$ متتاليتين عقديتين متقاربتين عندئذ:

1. $$\lim_{n\to\infty}(z_n+w_n)=\lim_{n\to\infty} z_n+\lim_{n\to\infty} w_n$$

2. $$\lim_{n\to\infty}(z_n\cdot w_n)=\lim_{n\to\infty} z_n\cdot\lim_{n\to\infty} w_n$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{z_n}{w_n}\right)=\frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} w_n}\ ,\ \lim w_n\neq 0$$

ملاحظة:

- مجموع متتاليتين متباعدتين ليس بالضرورة أن يكون متتالية متباعدة ومثالاً على ذلك: $z_n=\{n\}\ ,\ w_n=\{-n\}$
- وكذلك جداء متتاليتين متباعدتين ليس بالضرورة أن يكون متتالية متباعدة وخير دليل على ذلك المثال التالي: $z_n=\{(-1)^n\}\ ,\ w_n=\{(-1)^n\}$
- كذلك قسمة متتاليتين متباعدتين ليس بالضرورة أن يكون متتالية متباعدة ومثال على ذلك: $z_n=\{n+1\}\ ,\ w_n=\{n-1\}$

مبرهنة

تكون المتتالية العقدية محدودة إذا وفقط إذا كانت متتاليتا الأجزاء الحقيقية والتخيلية محدودتان.

أي:

$\{z_n=x_n+iy_n\}$ محدودة $\Longleftrightarrow$ $\{x_n\},\{y_n\}$ محدودتان.

الإثبات:

$(\Leftarrow)$: بفرض $\{z_n\}$ متتالية محدودة عندئذٍ:

$$\exists R < +\infty ; \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |z_n| < R$$

$$\Rightarrow |x_n| = |Re(z_n)| \leqslant |z_n| < R$$

$$|y_n| = |Im(z_n)| \leqslant |z_n| < R$$

ومنه $\{x_n\}, \{y_n\}$ محدودتان

$(\Rightarrow)$: بما أن $\{x_n\}, \{y_n\}$ محدودتان عندئذٍ:

$$\exists R_1 < +\infty : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| < R_1$$

$$\exists R_2 < +\infty : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |y_n| < R_2$$

نضع $R = 2\max(R_1, R_2)$ فيكون:

$$|z_n| = |x_n + iy_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < R$$

ومنه $\{z_n\}$ متتالية محدودة.

انتهت المحاضرة الثالثة