كلية العلوم قسم الرياضيات - جامعة دمشق		السنة : الثانية

المقرر : تحليل عددي (1)		الفصل : الأول

المحاضرة : (7)		التاريخ : 2013/10/29

الطريقة المباشرة لحل المعادلات من الدرجة الثالثة :

بفرض $f(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 = 0$ حيث $a_1 \neq 0$ نقسم طرفي المعادلة على a_1 فيصبح الشكل العام للمعادلة كما يلي :

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

ثم نجري التحويل التالي $x = z - \frac{a}{3}$ فنجد :

$$\left(z - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(z - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(z - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$z^3 - az^2 + \frac{a}{3}z - \frac{a^3}{27} + az^2 - \frac{2a^2}{3} + \frac{a^3}{9} + bz - \frac{ab}{3} + c = 0$$

$$z^3 + \underbrace{\left(-\frac{a^2}{3} + b\right)}_{p} z + \underbrace{\frac{2a^3}{27} - \frac{ba}{3} + c}_{q} = 0$$

$$\Rightarrow f(z) = z^3 + pz + q = 0$$

نفرض z_0 جذراً لهذه المعادلة ولنضع المعادلة $U^2 - z_0U - \frac{p}{3} = 0$

وليكن α, β جذران لهذه المعادلة عندئذٍ :

$$\alpha + \beta = z_0 \quad \text{و} \quad \alpha\,\beta = -\frac{p}{3}$$

نعوض في المعادلة $f(z) = 0$ فنجد :

$$f(z_0) = f(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0$$

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\,\alpha\beta^2 + \beta^3 + p\,\alpha + p\,\beta + q = 0$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\,\alpha\,\beta + p)(\alpha + \beta) + q = 0 \;:\; (3\,\alpha\,\beta + p)(\alpha + \beta) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = -q \quad \text{و} \quad \alpha^3\beta^3 = -\frac{p^3}{27}$$

هذا يعني أن α^3 و β^3 جذران للمعادلة :

$$v^3 + qv - \frac{p^3}{27} = 0$$

نحل هذه المعادلة فنجد أن :

$$v_1 = \frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2} \quad و \quad v_2 = \frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$$

$$\Rightarrow\ v_1 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad و \quad v_2 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$\Rightarrow\ \alpha = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad و \quad \beta = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_0 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$$ (للحفظ)

وهو حل المعادلة $f(z) = 0$ و لإيجاد x_0 حل المعادلة $f(x) = 0$ نعوض في $x_0 = z_0 - \frac{a}{3}$

مثال :

باستخدام الطريقة المباشرة أوجد جذور المعادلات التالية :

$$1)\quad x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$$

الحل :

نجري التحويل $x = z - 1$

$$\Rightarrow (z-1)^3 + 3(z-1)^2 - 3(z-1) - 14 = 0 \Rightarrow z^3 - 6z - 9 = 0$$

$$p = -6\,, q = -9 \Rightarrow z^3 - 6z - 9 = 0$$

$$z_0 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 3 \Rightarrow x_0 = 3 - 1 = 2$$

نعوض لنتحقق فنجد أن $(2)^3 + 3(2)^2 - 3(2) - 14 = 0$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+5x+7 \\ \hline x-2 & x^3+3x^2-3x-14 \\ & x^3-2x^2 \\ \hline & 5x^2-3x \\ & 5x^2-10x \\ \hline & 7x-14 \\ & 7x-14 \end{array}$$

طريقة ثانية للتحقق :

$$\Rightarrow f(x) = (x-2)(x^2+5x+7)$$

ليس لها سوى جذر وحيد

$$2)\ \ x^3 - 1.2x^2 + 2x - 2.4 = 0$$

نجري التحويل $x = z + 0.4$

$$\Rightarrow (z-0.4)^3 - 1.2(z-0.4)^2 + 2(z-0.4) - 2.4 = 0 \Rightarrow z^3 - 1.52x - 1.728 = 0$$

$$z_0 = \sqrt[3]{\frac{1.728}{2} + 0.9362} + \sqrt[3]{\frac{1.728}{2} - 0.9362} = 1.2164 - 0.4164 = 0.8$$

$$\Rightarrow x_0 = z_0 + 0.4 = 1.2$$

وظيفة :

$$3)\ \ f(x) = x^3 - 6x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$4)\ \ f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 20 = 0$$

$$5)\ \ f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

... انتهت المحاضرة (7) ...