كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق السنة : الثانية
المقرر : تحليل عددي 2 الفصل : الأول
المحاضرة : (13) التاريخ : 2013/11/24

خامساً : طريقة نيوتن الخلفية في حالة عقد متساوية :

ليكن $y = f(x)$ تابع معرف عند نقاط الارتكاز $x_0, x_1, \dots, x_n$ المرتبة تصاعدياً و المتساوية البعد فيما بينها

حيث : $h = x_i - x_{i-1} \ : \ i = \{1,2,\dots,n\}$

نعرف المؤثر التفاضلي ∇ كما يلي :

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} : i = \{1,\dots,n\}$$

حيث نسمي هذه الفروق بالفروق الخلفية الأولى للتابع $y = f(x)$ بنفس الطريقة نعرف الفروق الخلفية الثانية و الثالثة كما يلي :

$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_i - y_{i-1}) = y_i - y_{i-1} - (y_{i-1} - y_{i-2})$$
$$= y_i - 2y_{i-1} - y_{i-2} : i = \{2,\dots,n\}$$
$$\nabla^3 y_i = \nabla(\nabla^2 y_i) = \nabla(y_i - 2y_{i-1} - y_{i-2})$$
$$= y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3} : i = \{3,\dots,n\}$$
$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots$$
$$\nabla^m y_i = y_i - \binom{m}{1} y_{i-1} + \binom{m}{2} y_{i-2} - + \cdots + (-1)^m y_{i-m}$$
$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} y_{i-k} \quad : \quad i = \{m,\dots,n\}$$

نجري تغير بالمتحول $x = x_n + th$ فيكون $t = \frac{x - x_n}{h}$ فتكون حدودية الاستيفاء حسب نيوتن الخلفية :

$$\boxed{\bar{P}_n(t) = y_n + \binom{t}{1}\nabla y_n + \binom{t+1}{2}\nabla^2 y_n + \cdots + \binom{t+n-1}{n}\nabla^n y_n}$$ (للحفظ)

ملاحظة :

$$x = x_n \quad \Rightarrow t = 0 \quad \Rightarrow \bar{P}_n(0) = y_n$$
$$x = x_{n-1} \Rightarrow t = -1 \ \Rightarrow \bar{P}_n(-1) = y_{n-1}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$x = x_0 \quad \Rightarrow t = -n \Rightarrow \bar{P}_n(-n) = y_0$$

مثال :

باستخدام طريقة نيوتن الخلفية أوجد حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول ثم أوجد بشكل تقريبي $f(2.35)$

x	2.1	2.2	2.3	2.4
y	0.61	1.09	1.58	2.09

الحل :

نلاحظ أن نقاط الارتكاز متساوية البعد فيما بينها حيث : $x_n = 2.4\ ,\ h = 0.1\ ,\ n = 3$

نجري التحويل : $t = \frac{x-x_n}{h} = \frac{x-2.4}{0.1} = 10x + 24$ نكتب جدول الفروق الخلفية :

x	2.1		2.2		2.3		2.4
y	0.61		1.09		1.58		2.09
Δy		0.48		0.49		0.51	
$\Delta^2 y$			0.01		0.02		
$\Delta^3 y$				0.01			

فتكون حدودية الاستيفاء حسب نيوتن الخلفية كما يلي :

$$\bar{P}_3(t) = y_3 + \binom{t}{1}\nabla y_3 + \binom{t+1}{2}\nabla^2 y_3 + \binom{t+2}{3}\nabla^3 y_3$$

$$= y_3 + t\nabla y_3 + \frac{(t+1)t}{2!}\nabla^2 y_3 + \frac{(t+2)(t+1)t}{3!}\nabla^3 y_3$$

$$P_3(x) = 2.09 + (10x-24)(0.51) + \frac{(10x-23)(10x-24)}{2}(0.02) + \frac{(10x-22)(10x-23)(10x-24)}{6}(0.01)$$

$$\boxed{P_3(x) = \frac{10}{6}x^3 - \frac{21}{2}x^2 + \frac{161}{6}x - 24.87}$$

$$\Rightarrow f(2.35) \approx P_3(2.35) = 1.8318$$

تقدير الخطأ المرتكب في حساب حدودية الاستيفاء بطريقة نيوتن الخلفية :

بفرض $\bar{x} \in [x_0, x_n]$ بحيث $x_i < \bar{x} < x_{i+1}$ عندئذٍ : $\bar{t} = \frac{\bar{x}-x_n}{h}$ حيث

فيكون : $i-n-1 < \bar{t} < i-n$

$$\boxed{e(\bar{x}) = \binom{\bar{t}+i}{i+1} \nabla^{i+1} y_n = \frac{\bar{t}(\bar{t}+1)\dots(\bar{t}+i)}{(i+1)!} \nabla^{i+1} y_n}$$ (للحفظ)

بالعودة للمثال السابق :

لحساب الخطأ المرتكب في حساب $f(2.35)$ نكتب :

$$\bar{x} = 2.35 \Rightarrow \bar{t} = -0.5 \Rightarrow i = 2$$

$$\Rightarrow e(2.35) = \binom{\bar{t}+2}{2+1} \nabla^{2+1} y_3 = \frac{(-0.5)(0.5)(1.5)}{3!}(0.01) = 0.000625$$

وظيفة :

أوجد الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول

x	0	0.1	0.2	0.3
y	-1	-0.98	-0.91	-0.79

باستخدام طريقة نيوتن الأمامية ثم الخلفية ثم أوجد بشكل تقريبي $f(0.15)$ واحسب قيمة الخطأ المرتكب

... انتهت المحاضرة (13) ...