كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق السنة : الثانية

المقرر : تحليل (3) الفصل : الأول

المحاضرة : (7) التاريخ : 2013/10/28

سنكمل في هذه المحاضرة نشر بعض التوابع ..

9) - نشر التابع $f(x) = \ln(1-x)$ بجوار الصفر .

$$f(x) = \ln(1-x) \implies f'(x) = \frac{-1}{1-x}$$

ولكن :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \qquad ; \forall x \in]-1,+1[$$

وبالتالي :

$$\frac{-1}{1-x} = -1 - x - x^2 - x^3 - \cdots - x^n - \cdots$$

بالمكاملة :

$$\ln(1-x) + k = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \cdots \qquad (*)$$

$$\xRightarrow{x=0 \text{ نعوض}} \ln(1) + k = 0 + 0 + 0 + \cdots \implies 0 + k = 0 \implies k = 0$$

نعوض $k = 0$ في المعادلة $(*)$:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \cdots \qquad ; \forall x \in]-1,+1[$$

10) - نشر التابع $f(x) = arc\ tg\ (x)$ بجوار الصفر .

$$f(x) = arc\ tg\ (x) \implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

لدينا المنشورين :

$$\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+u^3+\cdots+u^n+\cdots$$

بشرط : $|u|<1$

$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+\cdots+(-1)^n.u^n+\cdots$$

بشرط : $|u|<1$

إذاً منشور مشتق التابع $f(x)$ هو :

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+(x^2)^2-(x^2)^3+\cdots+(-1)^n.(x^2)^n+\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n.x^{2n}+\cdots$$

بشرط : $|x^2|<1$

نكامل فنجد :

$$arc\ tg\ (x)+k=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \qquad (*)$$

$$\xRightarrow{\text{نعوض } x=0 \text{ في } (*)} arc\ tg\ (0)+k=0+0+0+\cdots \Rightarrow 0+k=0 \Rightarrow k=0$$

$$\xRightarrow{\text{نعوض } k=0 \text{ في} (*)} arc\ tg\ (x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

بشرط : $|x^2|<1$

ـ ولكن الشرط هنا مع x^2 ونحن نريده مع x $\Leftarrow$

$$|x^2|<1 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow x^2-1<0$$

ندرس إشارة هذه المتراجحة فنجد :

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ $+1$ $\quad$ $+\infty$
x^2-1	$+++$ $\quad$ 0 $\quad$ $---$ $\quad$ 0 $\quad$ $+++$

وبالتالي : $x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x = \mp 1$

ومنه :

وبالعودة للمنشور المدروس أصبح بإمكاننا أن نكتب :

$$arc\ tg\ (x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$\forall x \epsilon\ ]-1, +1[$$

< إن المنشورات من (1 وحتى 10) هي منشورات التوابع الشهيرة <

تمرين :

انشر بجوار الصفر التابع التالي :

$$f(x) = \frac{3}{2-5x}$$

الحل :

نجعل التابع المدروس تابعاً من الشكل : $\frac{1}{1-u}$

$$f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{2}x\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2-5x} = \frac{3}{2}\left[1 + \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}x\right)^2 + \cdots + \left(\frac{5}{2}x\right)^n + \cdots\right]$$

بشرط : $\left|\frac{5}{2}x\right| < 1$

$$\Rightarrow \frac{3}{2-5x} = \frac{3}{2} + \frac{3 \times 5}{2^2} . x + \frac{3 \times 5^2}{2^3} . x^2 + \cdots + \frac{3 \times 5^n}{2^{n+1}} . x^n + \cdots$$

حيث : $|x| < \frac{2}{5}$

تمرين :

انشر بجوار الصفر التابع التالي :

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}$$

حيث : $\alpha \in R \ \& \ \alpha \notin \mathrm{N}$

الحل :

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\Rightarrow$$

$$(1+x)^{\alpha} \sim 1 + \frac{\alpha}{1!}.x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}.x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.x^n + \cdots$$

$$\Rightarrow (1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}.x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}.x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.x^n + \cdots$$

بشرط : $|x| < 1$

ومنه :

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.x^n$$

$$\forall\, x \in\,]-1,+1[$$

تمرين :

انشر بجوار الصفر التابع التالي :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

الحل :

$$f(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}=[1+(-x)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1!}.(-x)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}.(-x)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-x)^3+\cdots$$

$$=1+\frac{x}{2(1!)}+\frac{1\times 3}{2!\,.(2^2)}.x^2+\frac{1\times 3\times 5}{3!\,.(2^3)}.x^3+\cdots+\frac{1\times 3\times 5\ldots\times(2n-1)}{(n!).(2^n)}.x^n+\cdots$$

بشرط : $|-x|<1$

مثال مشابه :

نشر التابع $f(x)=arc\sin(x)$ بجوار الصفر

و لحله نقوم بما يلي :

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=[1+(-x^2)]^{-\frac{1}{2}}$$

ونكمل كما في التمرين السابق .. ويكون الشرط : $|-x^2|<1$ وعندها نقوم بدراسة الإشارة لجعل الشرط من أجل $-x$.

نشر التابع الكسري :

ينشر التابع الكسري بجوار الصفر وفقاً لما يلي :

1. نحلل الكسر إلى مجموع كسور بسيطة إذا لم يكن هو تابعاً كسرياً بسيطاً سلفاً .
2. ننشر كل كسر لوحده مع ذكر مجال التقارب الملائم له .. ثم نعوض في عبارة التحليل للكسر لأخذ مجال التقارب (المجال النهائي) الذي ينجم عن تقاطع المجالات التي حصلنا عليها .

مثال :

انشر التابع التالي بجوار الصفر :

$$f(x)=\frac{5-x}{6-x-x^2}$$

الحل :

أولاً نحلل كما يلي :

$$f(x)=\frac{5-x}{(3+x)(2-x)}=\frac{A}{(3+x)}+\frac{B}{(2-x)}$$

$$\Longrightarrow 5-x=2A-Ax+3B+Bx \Longrightarrow 5-x=2A+3B+(-A+B)x$$

بالمطابقة :

$$\begin{cases}2A+3B=5\\-A+B=-1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}B=A-1\\2A+3A-3=5\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}B=A-1\\5A=8\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}A=\frac{8}{5}\\B=\frac{3}{5}\end{cases}$$

$$\overset{\text{وبالتالي}}{\Longrightarrow} f(x)=\frac{5-x}{(3+x)(2-x)}=\frac{8}{5}\times\frac{1}{3+x}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2-x}$$

$$=\frac{8}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{1+\frac{x}{3}}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{8}{15}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,.\left(\frac{x}{3}\right)^n+\frac{3}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

حيث : $\left|\frac{x}{3}\right|<1\ ,\quad \left|\frac{x}{2}\right|<1$

أي أن : $-2<x<2\quad \&\quad -3<x<3$

ومنه وبشرط : $|x|<2$ يكون لدينا :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{8}{15}\times(-1)^n\times\left(\frac{x}{3}\right)^n+\frac{3}{10}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]$$

$$\Longrightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{8.(-1)^n}{15.(3)^n}+\frac{3}{10.(2)^n}\right].x^n\quad ;\ \forall\, x\in\,]-2,+2[$$

... انتهت المحاضرة (7) ...