المحاضرة : الرابعة عشرة :

مثال : استخدم تحويلات لابلاس في حل المعادلة التفاضلية التكاملية الآتية :

$$\psi''(t)-2\psi'(t)+\psi(t)+2\int_0^t \cos(t-s)\,\psi''(s)\,ds+2\int_0^t \sin(t-s)\,\psi'(s)\,ds=\cos t$$

$\psi(0)=\psi'(0)=0$ المعرفة بالشروط الابتدائية

- $\mathcal{L}[\psi(t)]=\psi(z)$
- $\mathcal{L}[\psi''(t)]=z^2\psi(z)-z\psi(0)-\psi'(0)$
  $=z^2\psi(z)$
- $\mathcal{L}[\psi'(t)]=z\psi(z)$
- $\mathcal{L}[\cos t]=\dfrac{z}{z^2+1}$, $\mathcal{L}[\sin t]=\dfrac{1}{z^2+1}$
- $\mathcal{L}[h(t)]=\;''$

$$\Rightarrow z^2\psi(z)-2z\psi(z)+\psi(z)+2\frac{z^3}{z^2+1}\psi(z)+2\frac{z}{z^2+1}\psi(z)=\frac{z}{z^2+1}$$

$$\Rightarrow \psi(z)\left[z^2-2z+1+\frac{2z^3}{z^2+1}+\frac{2z}{z^2+1}\right]=\frac{z}{z^2+1}$$

$$\psi(z)\left[\frac{z^2(z^2+1)-2z(z^2+1)+z^2+1+2z^3+2z}{z^2+1}\right]=\frac{z}{z^2+1}$$

$$\psi(z)\left[\frac{z^4+z^2-\cancel{2z^3}-\cancel{2z}+z^2+1+\cancel{2z^3}+\cancel{2z}}{z^2+1}\right]=\frac{z}{z^2+1}$$

$$\psi(z)\left[\frac{z^4+2z^2+1}{(z^2+1)}\right]=\frac{z}{z^2+1}$$

$$\Psi(z)\left[\frac{(z^2+1)^2}{(z^2+1)}\right]=\frac{z}{z^2+1}$$

$$\Psi(z)=\frac{z}{(z^2+1)^2}$$

نعلم أن: $\mathcal{L}^{-1}[\sin t]=\frac{1}{z^2+1}$ وبالاستفادة من خاصية الضرب ب t^n نحصل على:

$$\mathcal{L}^{-1}[t.\sin t]=\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(-2z)}{(z^2+1)^2}$$

لكن: $\Psi(z)=\frac{z}{(z^2+1)^2}$

$$=\frac{-2z}{-2(z^2+1)^2}=\frac{1}{2}(-1)\left(\frac{-2z}{(z^2+1)^2}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\Psi(z)]=\psi(t)=\frac{1}{2}t.\sin t$$

11- استخدام تحويلات لابلاس في حل جمل المعادلات التكاملية لفولتيرا من النوع الثاني:

لتكن لدينا جملة المعادلات التكاملية التالية:

$$\varphi_j(x)=f_i(x)+\sum_{j=1}^{s}\lambda_j\int_0^x k_{ij}(x-t)\varphi_j(t)\,dt\;;\;i=\overline{1:s}$$

نأخذ تحويل لابلاس لكل الحدود.

$$\mathcal{L}[\varphi_j(x)]=\phi_j(p)$$

$$\mathcal{L}[f_i(x)]=f_i(p)$$

$$\mathcal{L}[K_{ij}(x)]=K_{ij}(p)$$

بالتعويض نحصل على:

/ /

$$\phi_j(p) = f_i(p) + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j K_{ij}(p)\, \phi_j(p)$$

جملة معادلات جبرية خطية نحلها حل مشترك ونقوم بالانتقال

لتحويل لابلاس العكسي فنحصل على الحل المطلوب للجملة.

مثال:

استخدم تحويلات لابلاس في ايجاد الحل المشترك لجملة المعادلات

التكاملية لفولتيرا من النوع الثاني:

$$\psi_1(x) = 1 - 2\int_0^x e^{2(x-t)} \psi_1(t)\,dt + \int_0^x \psi_2(t)\,dt$$

$$\psi_2(x) = 4x - \int_0^x \psi_1(t)\,dt + 4\int_0^x (x-t)\,\psi_2(t)\,dt$$

بأخذ تحويل لابلاس لكل معادلة طرفي فنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(z) &= \frac{1}{z} - \frac{2}{z-2}\psi_1(z) + \frac{1}{z}\psi_2(z) \\ \psi_2(z) &= \frac{4}{z^2} - \frac{1}{z}\psi_1(z) + \frac{4}{z^2}\psi_2(z) \end{aligned}\right\} (1)$$

نحلهم حل مشترك لنجد: ψ_1 و ψ_2.

إن جملة المعادلات (1) تكافئ جملة المعادلات التالية:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{z}{z-2}\right)\psi_1 - \frac{1}{z}\psi_2 &= \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z}\psi_1 + \left(\frac{z^2-4}{z^2}\right)\psi_2 &= \frac{4}{z^2} \end{aligned}\right\} (2)$$

$$\psi_1 = \psi_1(x), \quad \psi_2 = \psi_2(x)$$

بفرض أن:

$$\underline{P = \frac{1}{z}, \quad q = \frac{z}{z-2}, \quad r = \frac{z^2-4}{z^2}}$$

$$p(z),\ q(z),\ r(z)$$

من (٢،١) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} q\psi_1 - p\psi_2 &= p \\ p\cdot\psi_1 + r\,\psi_2 &= 4p^2 \end{aligned}\right\} \quad p, q, r \text{ معلومة.}$$

نحل الجملة الجديدة باستخدام طريقة كرامر.

$$\Delta = \begin{vmatrix} q & -p \\ p & r \end{vmatrix} = qr + p^2$$

$$\Delta = \left(\frac{z}{z-2}\right)\left(\frac{z^2-4}{z^2}\right) + \frac{1}{z^2}$$

$$= \frac{z+2}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{z^2+2z+1}{z^2}$$

$$\Delta = \frac{(z+1)^2}{z^2}$$

$$\Delta\psi_1 = \begin{vmatrix} p & -p \\ 4p^2 & r \end{vmatrix} = r\cdot p + 4p^3$$

$$\Rightarrow \Delta\psi_1 = \left(\frac{z^2-4}{z^2}\right)\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{4}{z^3} = \frac{z^2}{z^3} = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \Delta\psi_1 = \frac{1}{z}$$

$$\Delta\psi_2 = \begin{vmatrix} q & p \\ p & 4p^2 \end{vmatrix} = 4p^2\cdot q - p^2$$

$$\Delta\psi_2 = \frac{4}{z^2}\left(\frac{z}{z-2}\right) - \frac{1}{z^2}$$

$$\frac{z}{(z+1)^2} = \frac{z+1-1}{(z+1)^2}$$
$$= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2}$$

$$\Delta\psi_2 = \frac{4}{z(z-2)} - \frac{1}{z^2} = \frac{4z-(z-2)}{z^2(z-2)}$$

$$\boxed{\Delta\psi_2 = \frac{3z+2}{z^2(z-2)}}$$

وبالتالي فإن حل الجملة هو:

$$\psi_1 = \frac{\Delta\psi_1}{\Delta} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{(z-1)^2}{z^2}} = \boxed{\frac{z}{(z+1)^2}}$$

$$\psi_2 = \frac{\Delta\psi_2}{\Delta} = \boxed{\frac{3z+2}{(z-2)(z+1)^2}}$$

$$\mathcal{L}^{-1} = \psi_1(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{(z+1)^2}\right] = e^{-x} - x e^{-x}$$

$$\psi_2 = \frac{3z+2}{(z-2)(z+1)^2} = \frac{Az+B}{(z+1)^2} + \frac{C}{z-2}$$

بتوحيد المقامات نحصل على: $A = -\frac{8}{9}$, $C = \frac{8}{9}$, $B = -\frac{5}{9}$

$$\Rightarrow \psi_2 = \frac{-\frac{8}{9}z - \frac{5}{9}}{(z+1)^2} + \frac{\frac{8}{9}}{z-2}$$

$$\psi_2 = \frac{-\frac{8}{9}z - \frac{8}{9} + \frac{8}{9} - \frac{5}{9}}{(z+1)^2} + \frac{\frac{8}{9}}{z-2}$$

$$= \frac{-\frac{8}{9}}{(z+1)} + \frac{\frac{1}{3}}{(z+1)^2} + \frac{\frac{8}{9}}{z-2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \psi(x) = -\frac{8}{9}e^{-x} + \frac{1}{3}x\,e^{-x} + \frac{8}{9}e^{2x}$$