المعادلات التفاضلية التامة :

تعريف :

نقول عن المعادلة التفاضلية التالية أنها تامة

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \ldots \text{I}$$

إذا وجدت دالة على الشكل $F(x,y)$ تحقق:

$$d\,F(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \quad \ldots II$$

حيث $M(x,y)$, $N(x,y)$ دالتان معرفتين ومستمرتين على $\mathbb{R}$ وبالتالي على أي جزء منها.

نعلم أنّ :

$$d\,F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \quad \ldots III$$

بالمقارنة بين $\ldots II$ و $\ldots III$ نجد :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \;, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

وبفرض أن لـ N, M مشتقات من مراتب عليا

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}} \Leftarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

الشرط اللازم والكافي لتكون المعادلة التفاضلية تامة

ويكون حلها العام من الشكل التالي :

$$F(x,y) = c$$

مثال (1) : بين أن المعادلة التالية تامة ثم أوجد حلها :

$$x^2\,dx + y^2\,dy = 0$$

الحل :

$$M(x,y) = x^2 \Rightarrow \frac{\partial\, M(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$N(x,y) = y^2 \Rightarrow \frac{\partial\, N(x,y)}{\partial x} = 0$$

ومنه فإن المعادلة التفاضلية تامة وحلها هو :

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 = c \Rightarrow F(x,y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$$

مثال (2) : بين أن المعادلة التالية تامة ثم أوجد حلها :

$$x\,dy + y\,dx = 0$$

الحل :

$$M(x,y) = y \Rightarrow \frac{\partial\, M(x,y)}{\partial y} = 1$$

$$N(x,y) = x \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1$$

ومنه فإن المعادلة تامة وحلها هو :

$$x\,dy + y\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln|x| + \ln|y| = \ln|c| \Rightarrow x\,.\,y = c \Rightarrow F(x,y) = x\,.\,y$$

إيجاد الحل العام للمعادلة التامة :

وجدنا سابقاً أن :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \ , \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

وهذا الشرط يحقق المعادلة التالية :

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y)$$

حيث $\varphi(y)$ دالة تابعة لـ y ومشتقها بالنسبة لـ x هو الصفر.

إيجاد $\varphi(y)$: نشتق المعادلة السابقة بالنسبة لـ y

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx\right) + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow N(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dx + \varphi'(y)$$

وليكن لدينا :

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow N(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} dx + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow N(x,y) = [N(x,y)]_{x_0}^{x} + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow \ N(x,y) = N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \ N(x_0,y)$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\, dy + c$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\, dy + c$$

مثال (1) :

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$\frac{1}{x}\,dy - \frac{y}{x^2}\,dx = 0$$

الحل : (نتأكد فيما إذا كانت المعادلة تامة)

$$M(x,y) = -\frac{y}{x^2} \Rightarrow \frac{M(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{x^2}$$

$$N(x,y) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{N(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$$

ومنه المعادلة التفاضلية تامة.

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \varphi(y)$$

$$= \int -\frac{y}{x^2}\ dx + \varphi(y) = \frac{y}{x} + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{y}{x} + \varphi(y)$$

اشتقاق بالنسبة لـ y

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x} + \varphi'(y)$$

$$N(x,y) = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{y}{x} + c$$

مثال (2) : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

(نتأكد أن المعادلة تامة)

$$M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2 \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 12x\,.\;y$$

$$N(x,y) = 6x^2y + 4y^3 \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 12x\,.\;y$$

ومنه فالمعادلة تامة

طريقة (1) :

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \varphi(y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx + \varphi(y)$$

$$\boxed{F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)}$$

(نشتق بالنسبة لـ y)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = 0 + 6x^2y + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow 6x^2y + 4y^3 = 6x^2y + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4 + c$$

$$\Rightarrow F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + c$$

طريقة (2) :

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,dy + \varphi(x) = \int (6x^2y + 4y^3)dy + \varphi(x)$$

$$F(x,y) = 3x^2y^2 + y^4 + \varphi(x)$$

(نشتق بالنسبة لـ x)

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = 6xy^2 + 0 + \varphi'(x)$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6xy^2 = 6xy^2 + \varphi'(x)$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 3x^2 \Rightarrow \varphi(x) = x^3 + c$$

$$\Rightarrow F(x,y) = 3x^2y^2 + y^4 + x^3 + c$$

مثال (3) : حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$(3e^{3x}y - 2x)\,dx + e^{3x}\,dy = 0$$

الحل :

$$M(x,y) = 3e^{3x}y - 2x \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3e^{3x}$$

$$N(x,y) = e^{3x} \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3e^{3x}$$

ومنه فالمعادلة التفاضلية تامة

طريقة (1) :

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \varphi(y) = \int (3e^{3x}y - 2x)dx + \varphi(y)$$

$$F(x,y) = e^{3x}y - x^2 + \varphi(y)$$

(نشتق بالنسبة لـ y)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = e^{3x} - 0 + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow e^{3x} = e^{3x} + \varphi'^{(y)} \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c$$

$$\Rightarrow F(x,y) = e^{3x}y - x^2 + c$$

طريقة (2) :

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,dy + \varphi(x) = \int e^{3x}\,dy + \varphi(x)$$

$$F(x,y) = e^{3x}y + \varphi(x)$$

(نشتق بالنسبة لـ x)

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = 3e^{3x}y + \varphi'(x)$$

$$\Rightarrow 3e^{3x}y - 2x = 3e^{3x}y + \varphi'(x)$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = -2x \Rightarrow \varphi(x) = -x^2 + c$$

$$\Rightarrow F(x,y) = e^{3x}y - x^2 + c$$

مثال (4) : بين أن المعادلة التالية تامة ثم أوجد الحال العام لها :

$$x\,dx + y\,dy + \frac{y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = 0$$

الحل :

$$(x^3 + xy^2)dx + (yx^2 + y^3)dy + y\,dx + x\,dy = 0$$

$$\Rightarrow (x^3 + xy^2 + y)dx + (y^2 + yx^2 + x)dy = 0$$

$$\Rightarrow M(x,y) = x^3 + xy^2 + y \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 + 2xy + 1$$

$$N(x,y) = y^3 + yx^2 + x \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0 + 2xy + 1$$

ومنه فالمعادلة التفاضلية تامة

$$\Rightarrow F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) = \int (x^3 + xy^2 + y)dx + \varphi(y)$$

$$F(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}y^2 + x\,.\,y + \varphi(y)$$

(نشتق بالنسبة لـ y)

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = 0 + x^2.\,y + x + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow y^3 + yx^2 + x = x^2y + x + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = y^3 \Rightarrow \varphi(y) = \frac{1}{4}y^4 + c$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + x\,.\,y + \frac{1}{4}y^4 + c$$

... انتهت المحاضرة (8) ...