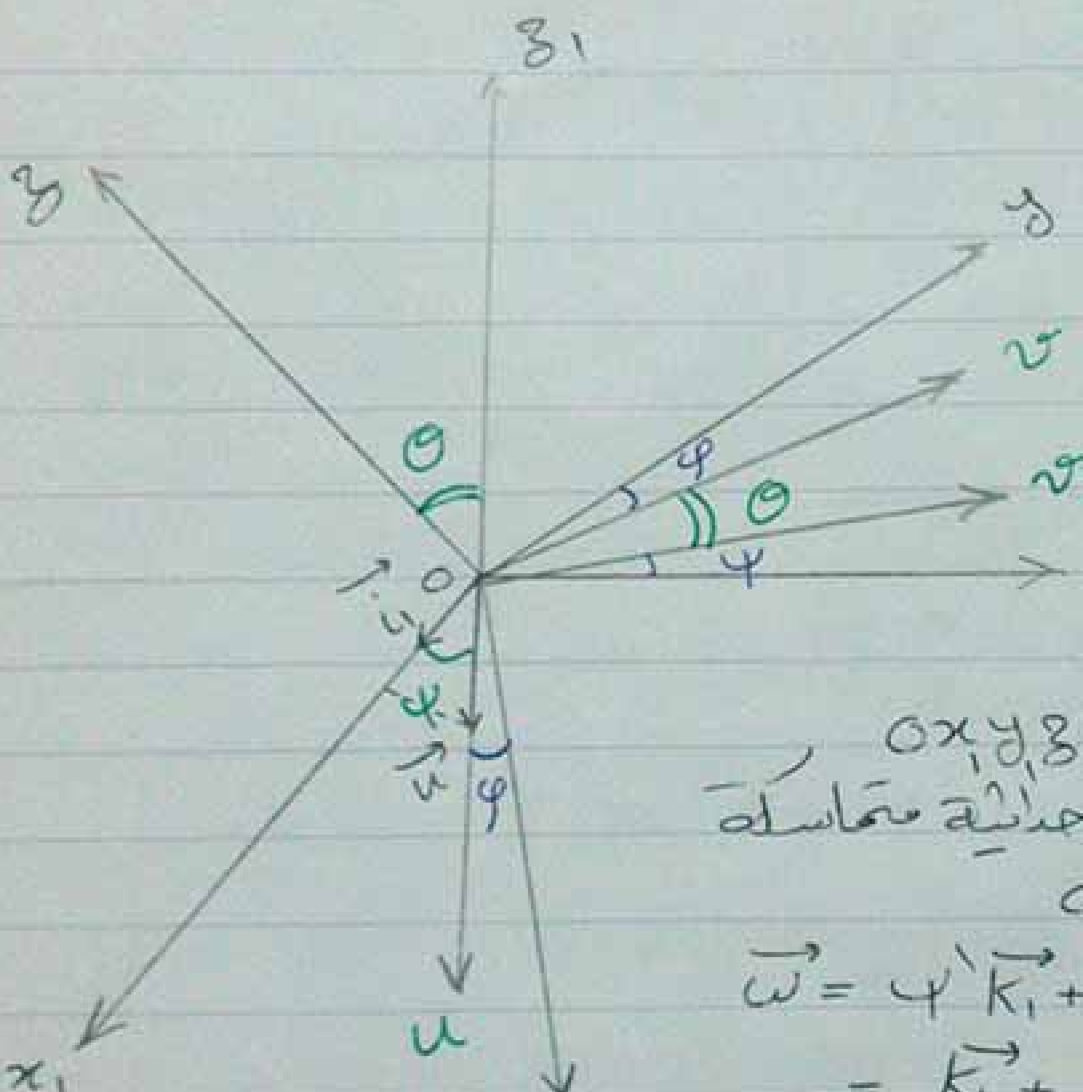
يتحرك قضيب OA طوله a في الفراغ بحيث تبقى النقطة O ثابتة تتعين حركته بتابعية زوايا أولر التالية :

$$\psi = t \ , \ \theta = 2t \ , \ \varphi = \frac{\pi}{4}$$

عين شعاع الدوران الآني و التسارع الزاوي الآني و مركبتي القاعدة و المتدحرج و سرعة زاوية القضيب OA في اللحظة t.

الحل :

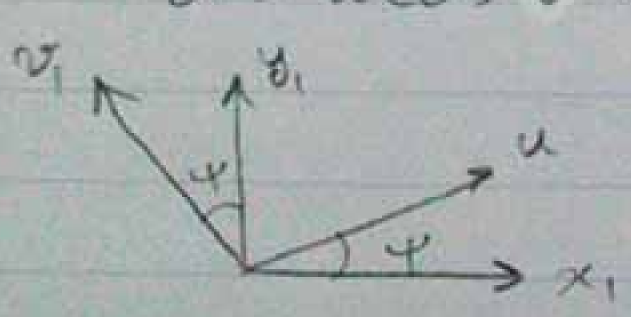


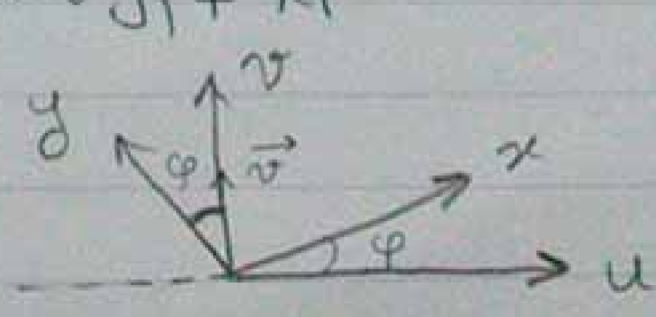
نختار جملة ثابتة $Ox_1y_1z_1$
ونختار جملة محاور إحداثية متماسكة مع الجسم $Oxyz$.

$$\vec{\omega} = \psi' \vec{k_1} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{k}$$
$$= \vec{k_1} + 2\vec{u}$$

$$\vec{\omega} = \vec{k_1} + 2(\cos\psi \, \vec{i_1} + \sin\psi \, \vec{j_1})$$ على الثابتة

$$\vec{\omega} = 2\cos t \, \vec{i_1} + 2\sin t \, \vec{j_1} + \vec{k_1}$$





على الماسكة :

على الماسكة $\vec{u} = \cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

على الماسكة $\vec{k_1} = \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{v}$

$$= \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\left[\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\,\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\,\vec{j} + \cos 2t\,\vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\right)\vec{i} + \left(-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\right)\vec{j} + \cos 2t\,\vec{k}$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}' = \sqrt{2}\cos 2t\,\vec{i} + \sqrt{2}\cos 2t\,\vec{j} - 2\sin 2t\,\vec{k}$$

إيجاد مخروطي القاعدة والمتدحرج :

على الناتجة

لتكن $(x_1, y_1, z_1) \in \Delta$ عندئذ :

$$\vec{\omega} \parallel \Delta$$

$$\frac{x_1}{2\cos t} = \frac{y_1}{2\sin t} = \frac{z_1}{1}$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 2z_1\cos t \\ y_1 &= 2z_1\sin t \end{aligned}\right\}$$ المعادلات الوسيطية للقاعدة

$$\rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 4z_1^2$$

وهي معادلة القاعدة.

في الماسكة

لتكن $(x, y, z) \in \Delta$

$$\vec{\omega} \parallel \Delta$$

$$\frac{x}{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t} = \frac{y}{-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t} = \frac{z}{\cos 2t}$$

$$x \cos 2t = \sqrt{2}\, z + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2t)\, z$$

$$y \cos 2t = -\sqrt{2}\, z + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2t)\, z$$

المعادلات الوسيطية للمتحرك

$$\Rightarrow (x-y)\cos 2t = 2\sqrt{2}\, z \longrightarrow$$

$$\cos 2t = \frac{2\sqrt{2}\, z}{x-y} \rightarrow 2t = \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}\, z}{x-y}\right)$$

$$t = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}\, z}{x-y}\right)$$

نعوض في إحدى المعادلات الوسيطية ولتكن الأولى فنجد :

$$x\left(\frac{2\sqrt{2}\, z}{x-y}\right) = \sqrt{2}\, z + \frac{\sqrt{2}}{2} z \sin \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}\, z}{x-y}\right)$$

$$\frac{2\sqrt{2}\, x z}{x-y} = \sqrt{2}\, z + \frac{\sqrt{2}}{2} z \sqrt{1 - \frac{8z^2}{(x-y)^2}}$$

$$\frac{2\sqrt{2}\, x z}{x-y} = \frac{2\sqrt{2}\,(x-y)\, z}{2(x-y)} + \frac{\sqrt{2}\, z}{2(x-y)} \sqrt{(x-y)^2 - 8z^2}$$

وهي معادلة المتحرك .

القطب الآني :

السرعة على الثابتة

$$\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ l & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= l r \vec{j} - q l \vec{k}$$

$$= \underbrace{l \cos 2t}_{v_y}\, \vec{j} - l\underbrace{\left(-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2t\right)}_{v_z} \vec{k}$$

$$\vec{\Gamma}(A) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(A)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p' & q' & r' \\ l & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ 0 & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= (q v_z - r v_y)\vec{i} + (r'p - p v_z)\vec{j} + (-l q' + p v_y)\vec{k}$$