/ /

المحاضرة الثامنة:

مثال: حل المعادلة التكاملية الآتية مستخدماً النواة المترددية وذلك إذا علمت أن شروط وجود الحل محققة:

$$\psi(x) - \lambda \int_0^1 \sin(\ln x)\, \psi(t)\, dt = 2x$$

$K(x,t) = \sin(\ln(x))$

$a_1(x) = \sin(\ln x)$

$b_1(t) = 1$

$a_{11} = \int_0^1 \sin(\ln t)\, dt = -\frac{1}{2}$

$c_1 = 1 + \lambda(-\frac{1}{2})c_1$

$c_1 = \frac{2}{2+\lambda}$

$\psi(x) = 2x + \lambda c_1 \cdot a_1(x)$

$\psi(x) = 2x + \frac{2}{2+\lambda} \cdot \lambda \sin(\ln x)$

- المعادلة التكاملية المنحلة:

إذا كان $h(x) \neq 0$ $\Delta(\lambda) = 0$

هذا يدعونا إلى التحدث عن المعادلة التكاملية المنحلة وبالتالي الدراسة لا تكتمل إلا بوجود المعادلة التكاملية المنحلة

تسمى المعادلة من الشكل التالي:

$$\boxed{\varphi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b K(t,x)\, \varphi(t)\, dx \quad *}$$

/ /

مثلاً:

$$\varphi(x) = \sin x + \lambda \int_0^1 (t-x)\,\varphi(t)\,dt$$

$$\psi(x) = x + \lambda \int_0^1 (x-t)\,\psi(t)\,dt$$

المعادلة في الأولى هي منقول لمعادلة في الثانية لأن x و t تبادلا المواضع

أما المعادلة التكاملية المنقولة المتجانسة تكتب بالشكل:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(t,x)\,\varphi(t)\,dt$$

أي أن $\ell(x) = 0$

- كيف نحل المعادلة التكاملية المنقولة:

نأخذ النواة المتردية:

$$k(t,x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\, b_k(x)$$

بالتعويض الآن:

$$\varphi(x) = \ell(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum a_k(t)\, b_k(x)\right)\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi(x) = \ell(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \int_a^b a_k(t)\,\varphi(t)\,dt$$

- نضع المصطلح الآتي:

$$C_k = \int_a^b a_k(t)\,\varphi(t)\,dt$$

تصبح:

$$\varphi(x) = \ell(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k\, b_k(x)$$

$$\varphi(t) = \ell(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k\, b_k(t)$$

$$c_k = \int_a^b a_k(t)\left[\ell(t) + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m\, b_m(t)\right] dt \quad (m = 1, n)$$

/ /

$$c_k = \int_a^b a_k(t)\,l(t)\,dt + \lambda \int_a^b a_k(t) \sum_{m=1}^{n} c_m\, b_m(t)\,dt$$

$$c_k = \int_a^b a_k(t)\,l(t)\,dt + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m \int_a^b a_k(t)\, b_m(t)\,dt$$

نرمز بالمصطلحات :

$$l_k = \int_a^b a_k(t)\,l(t)\,dt \qquad k = \overline{1,n}$$

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t)\, b_m(t)\,dt \qquad m = \overline{1,n}$$

$$c_k = l_k + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m\, a_{km}$$

$$m \longrightarrow k$$

$$c_m - \lambda \sum_{m=1}^{n} a_{mk}\, c_k = l_m \quad (**)$$

نستنتج أن حل المعادلة التكاملية * يكافئ حل جملة المعادلات الجبرية الخطية (**) وهنا نلاحظ أن معين الأمثال للجموعة * يساوي معين الأمثال لـ المجموعة السابقة (الى حزة سابقة) وهذا يعني بدوره أن

القيم المميزة للنواة $K(x,t)$ = القيم المميزة للنواة $K(t,x)$

وهذا يؤدي بدوره أنه إذا كان لمعادلة فريدهولم التكاملية حلاً وحيداً فإن للمعادلة (*) أيضاً حل وحيد (بالنسبة لغير متجانسة)

- أما المتجانسة : إذا كانت (**) متجانسة $\Leftarrow l_m = 0$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} (\delta_{km} - \lambda a_{km})\, c_m = 0 :$$

عندها يكون للمعادلة حلاً غير الحل الصفري، وإذا فرضنا أن $E'(\lambda)$ فضاء الحل المعادلات الجبرية المتعلقة بالمنقولة عندئذ يكون بعد هذا الفضاء $\dim E' = p'$

وبالاستعاضة نستنتج أن $p = p'$

/ /

أن $\dim E'(\lambda) = \dim E(\lambda)$ إذا فرضنا C^{m} قاعدة

$$C^{(m)} = \vec{C}_1^{(m)}, \vec{C}_2^{(m)}, \vec{C}_3^{(m)}, \ldots, \vec{C}_n^{(m)} \quad (m = \overline{1,p})$$

فهي عبارة عن قاعدة لفضاء الحل $E'(\lambda)$ والذي بعده p' عندئذ يعطينا كل حل من هذه الحلول بتعويضه في المعادلة التكاملية المتجانسة

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k b_k(x)$$

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k b_k(x) \quad (A)$$

$$\varphi^{(m)}_{(x)} = \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k^{(m)} b_k(x) \quad (B)$$

لدينا $\varphi^{(m)}_{(x)}$ حلاً لمعادلة التكاملية المنقولة المتجانسة الموافقة لـ *

وهذه الحلول هي:

$$\varphi^{1}_{(x)}, \varphi^{(2)}_{(x)}, \varphi^{(3)}_{(x)}, \ldots, \varphi^{(p)}_{(x)}$$

وهذه الحلول تشكل دوال مستقلة خطياً معين رونسكي غير معدوم والأكثر من ذلك فإن هذه الحلول تشكل قاعدة لفضاء حلول هذه المعادلة، لكننا نعلم أن الشرط اللازم والكافي لحل المعادلات الجبرية الخطية الآتية:

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot C_k = h_m$$

في حالة معين لا مساوياً للصفر وأن يكون المتجه h مركباته $\vec{h}(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ متعامداً مع جميع المتجهات $\vec{C}^{(m)}$ $(m = \overline{1,p})$ أي أن

$$\vec{h} \cdot \vec{C}^{(m)} = 0$$ الجداء الداخلي

$$\sum_{k=1}^{n} h_k \cdot c_k^{(m)} = 0$$

نضرب جميع الحدود بـ λ :

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} h_k \cdot c_k^{(m)} = 0$$

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} \int_a^b b_k(t)\, h(t) \cdot c_k^{(m)}\, dt = 0$$

$$\int_a^b \Big[\lambda \sum_{k=1}^{n} c_k^{(m)} b_k(t) \Big] h(t)\, dt = 0$$

بملاحظة العلاقة السابقة (B)

$$\boxed{\int_a^b \varphi^{(m)}(t) \cdot h(t)\, dt = 0} \quad (C)$$

وهذا الشرط يسمى شرط التعامد أي بعبارة أخرى إذا ما تحقق الشرط (C) فعندئذ لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني حل. سندرس الآن كيفية إيجاد هذا الحل :

نفرض أنه يوجد حل خاص للمعادلة (1) (التكاملية الخطية غير متجانسة من نوع ثاني)

وليكن $\varphi_0(x)$ حلاً خاصاً لـ (1) نجري التحويل:

$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \overline{\varphi_1}(x)$ حيث $\varphi_0(x)$ حلاً خاصاً ولنعوض هذا الحل في (1) فيصبح لدينا:

$$\varphi_0(x) + \overline{\varphi_1}(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \left[\varphi_0(t) + \overline{\varphi_1}(t) \right] dt$$

نفك الأقواس:

$$\varphi_0(x) + \overline{\varphi_1}(x) = \underline{h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \varphi_0(t)\, dt} + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \overline{\varphi_1}(t)\, dt$$

$$\cancel{\varphi_0(x)} + \overline{\varphi_1}(x) = \cancel{\varphi_0(x)} + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \overline{\varphi_1}(t)\, dt$$

/ /

$$\psi_1(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\,\psi_1(t)\,dt \quad (D)$$

وهي نفس المعادلة (1) ولكنها متجانسة وبحل $\psi(x)$ هو $\psi_1(x)$ هذا يعني

أن الحل العام للمعادلة (1) هو حل خاص $\psi_0(x)$ مضافاً إليه حل $\psi_1(x)$

والحل العام للمعادلة (D) المتجانسة هو تركيب خطي لمجموعة من الدوال المستقلة

خطياً أي: $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots \psi_p(x)$

$$\psi_1(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + c_3\psi_3(x) + \ldots c_p\psi_p(x)$$

ومن هنا نستنتج أن الحل العام لمعادلة فريدهولم التكاملية

الخطية من النوع الثاني غير المتجانسة يكتب بالشكل التالي:

$$\psi(x) = \psi_0(x) + c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + \ldots c_p\psi_p(x)$$

على ضوء ذلك يمكننا الآن استنتاج أو صياغة مبرهنة فريدهولم

- مبرهنة فريدهولم: تنص كما يلي:

- إذا لم تكن λ قيمة مميزة للنواة $k(x,t)$ فالمعادلة التكاملية المتجانسة (1)

ولمنقولها حلاً صفرياً ويكون للمعادلة (1) غير المتجانسة ولمنقولها حلاً وحيداً.

- إذا كانت λ قيمة مميزة للنواة $k(x,t)$ فإن للمعادلة التكاملية المتجانسة

الموافقة لـ(1) ولمنقولها حلولاً غير الحل الصفري وهذه الحلول تشكل

فضاء ذا بعد منتهي وعلى اعتبار:

$\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots \psi^{(p)}$ قاعدة لمجموعة الحل الأولى

و $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots \varphi^{(p)}$ قاعدة لمجموعة الحل الثانية

عندئذ الشرط اللازم والكافي لكي يكون للمعادلة (1) حل هو أن يتحقق الشرط (C)

شرط التعامد، ويكون الحل العام عندئذ هو حل خاص مضافاً إليه حلاً عاماً

لمعادلة المتجانسة الموافقة لها، وإذا لم تحقق الشرط (C) فالمعادلة عندئذ

مستحيلة الحل.