تمارين :

1) ـ انشر (بجوار الصفر) التابع :

$$f(x) = sin^2x$$

الحل :

بملاحظة

$$\boxed{\cos 2x = cos^2x - sin^2x = 1 - 2sin^2x = 2cos^2x - 1}$$

نجد أن :

$$sin^2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

ولكن لدينا :

$$\boxed{\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} \mp \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad ; \forall\, u \,\epsilon\,]-\infty, +\infty[}$$

وبالتالي وبتعويض $(u = 2x)$ نحصل على :

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2.x^2}{2!} + \frac{2^4.x^4}{4!} - \frac{2^6.x^6}{6!} \pm \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n}.x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\forall x \,\epsilon\,]-\infty, +\infty[$$

إذاً :

$$sin^2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2^2.x^2}{2!} + \frac{2^4.x^4}{4!} \pm \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n}.x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow sin^2x = +\frac{2.x^2}{2!} - \frac{2^3.x^4}{4!} \pm \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}.x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\forall\, x \,\epsilon\,]-\infty, +\infty[$$

2) ـ انشر (بجوار العدد 3) التابع :

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

الحل :

نجري تحويلات على التابع ليصبح من الشكل : $\boxed{\frac{1}{1+u} \quad \text{بشرط : } |u|<1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-(x-3)-3}=\frac{1}{-2-(x-3)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x-3}{2}\right)} \quad ; \quad u=\frac{x-3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x}=-\frac{1}{2}\left[1-\frac{x-3}{2}+\left(\frac{x-3}{2}\right)^2-\left(\frac{x-3}{2}\right)^3\pm\cdots+(-1)^n\left(\frac{x-3}{2}\right)^n+\cdots\right]$$

بشرط : $\left|\frac{x-3}{2}\right|<1$

أي أن : (بحل المتراجحة)

$$\frac{|x-3|}{2}<1 \Leftrightarrow |x-3|<2 \Rightarrow -2<x-3<+2 \Rightarrow 1<x<5$$

ومنه : $\forall\, x \in\,]1,5[$

ملاحظة :

$$\underbrace{f(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\cdots+\frac{f^n(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n+\cdots}$$

(منشور تايلور)

$$\xrightarrow{\alpha=0} \underbrace{f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\cdots}$$

(منشور ماكلوران)

3) ـ انشر (بجوار الصفر) التابع :

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

الحل :

$$f(x) = (1+x)^{-1} = 1 + \frac{-1}{1!}x + \frac{(-1)(-1-1)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\Longrightarrow f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad ; \ \forall\, |x| < 1$$

4) ـ انشر (بجوار الصفر) التابع :

$$f(x) = e^{2x+1}$$

الحل :

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + \cdots \qquad ; \ \forall\, u \,\epsilon\,]-\infty, +\infty[$$

$$\xRightarrow{u=2x} e^{2x} = 1 + \frac{2.x}{1!} + \frac{2^2.x^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n.x^n}{n!} + \cdots$$

$$\xrightarrow{\text{أخيراً}} f(x) = e^{2x+1} = e.e^{2x} = e\left(1 + \frac{2.x}{1!} + \cdots + \frac{2^n.x^n}{n!} + \cdots\right) \quad ; \ \forall\, x \,\epsilon\,]-\infty, +\infty[$$

5) ـ انشر (بجوار الصفر) التابع :

$$f(x) = \frac{2}{3x-5}$$

الحل :

$$f(x) = \frac{2}{-5+3x} = \frac{2}{-5}.\frac{1}{1-\frac{3}{5}x}$$

$$\Longrightarrow f(x) = -\frac{2}{5}\left[1 + \frac{3}{5}x + \left(\frac{3}{5}x\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{5}x\right)^n + \cdots\right]$$

بشرط : $\left|\frac{3}{5}x\right| < 1$

أي أن : (بحل المتراجحة)

$$\left|\frac{3}{5}x\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{5}|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{5}{3} \;\Longrightarrow\; \forall\, x \,\epsilon\,]-\frac{5}{3}, +\frac{5}{3}[$$

> التكامل الغمّاوي >

تعريف :

التكامل الغمّاوي هو التكامل المعتل التالي :

$$\int_{0}^{+\infty} x^{p-1}.e^{-x}.dx \qquad : p \,\epsilon\, R$$

ويرمز له بالرمز : $\Gamma(p)$

$$\Longrightarrow \Gamma(p) = \int_{0}^{+\infty} x^{p-1}.e^{-x}.dx$$

ويكون هذا التكامل متقارباً عندما : $p > 0$

خواص التكامل الغمّاوي

1. $\Gamma(1) = 1$

البرهان : $p = 1 \Longleftarrow$

$$\Gamma(1) = \int_{0}^{+\infty} e^{-x}.dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = \left[-\frac{1}{e^x}\right]_0^{+\infty} = [-0+1] = 1$$

2. $0 < \mathrm{p} \,\epsilon\, \mathrm{R} \Longrightarrow \Gamma(p+1) = p.\Gamma(p)$

البرهان : (حسب التعريف)

$$\Gamma(p+1) = \int_{0}^{+\infty} x^{p}.e^{-x}.dx$$

نكامل بالتجزئة بحيث : $u = x^p \Longrightarrow du = p.x^{p-1}.dx$

$$dv = e^{-x}.dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$$

$$\Longrightarrow \Gamma(p+1) = [-x^p.e^{-x}]_0^{+\infty} + p.\int_{0}^{+\infty} x^{p-1}.e^{-x}.dx = -\left[\frac{x^p}{e^x}\right]_0^{+\infty} + p.\Gamma(p)$$

$$= 0 + p.\Gamma(p) = p.\Gamma(p)$$

3. $n \in N^* \implies \Gamma(n+1) = n!$

البرهان : (حسب الخاصة 2)

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n.\Gamma[(n-1)+1] = n.(n-1).\Gamma(n-1)$$
$$= n.(n-1).\Gamma[(n-2)+1] = n.(n-1).(n-2).\Gamma(n-2) = \cdots$$
$$= n.(n-1).(n-2)\ldots\ldots\ldots 3.2.1.\Gamma(1) = n!$$

< التكامل البيتَّاوي >

تعريف :

هو التكامل التابع لوسيطين من الشكل :

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}.dx$$

ويكون التكامل البيتَّاوي متقارباً إذا كان : $p > 0 \quad \& \quad q > 0$

خواص التكامل البيتَّاوي :

1. $\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)$

البرهان :

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}.dx$$

لنفرض أنَّ : $(1-x=y)$ فيكون : $-dx = dy$

وبالتالي : $dx = -dy$

وأيضاً : $x = 1-y$

(وتغيرات حدود التكامل) $x = 0 \implies y = 1 \ ,\ x = 1 \implies y = 0$

الآن نعوض فنجد :

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_1^0 (1-y)^{p-1}.y^{q-1}.(-dy)$$

نقلب الآن حدي التكامل فتقلب الإشارة أي أن :

$$\Rightarrow \mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 y^{q-1}.(1-y)^{p-1}.dy=\mathrm{B}(q,p)$$

2. (العلاقة بين التابعين الغمّاوي والبيتّـاوي) ـ خاصة هامة جداً ـ

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

مثال على هذه الخاصة :

ليكن لدينا التكامل :

$$\int_0^1 x^4.(1-x)^6.dx \quad : p=5\ ,q=7$$

وبتطبيق الخاصة السابقة نجد أن :

$$\mathrm{B}(5,7)=\frac{\Gamma(5).\Gamma(7)}{\Gamma(12)}\xRightarrow[\text{حسب الخاصة (3)}]{}=\frac{\Gamma(4+1).\Gamma(6+1)}{\Gamma(11+1)}=\frac{(4!).(6!)}{(11!)}$$

$$=\frac{(4\times 3\times 2\times 1).(6!)}{11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6!}=\frac{1}{11\times 210}$$

ملاحظة هامة جداً :

$$0<p<1\ \Rightarrow \Gamma(p).\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(p.\pi)}$$

نتيجة :

$$\xrightarrow{p=\frac{1}{2}}\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\Rightarrow\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\pi$$

$$\boxed{\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}}$$ ((للحفظ))

... انتهت المحاضرة (8) ...