المحاضرة السابقة ٢٠١٣/١١/١٧

مثال: ليكن لدينا الفضاء $V = \mathbb{R}^3$ ولتكن S

$S = \{v_1 = (0,1,1), v_2 = (1,0,1)\}$

أوجد $W = \{\sum_{i=1}^{2} \lambda_i v_i \; ; \; \lambda_i \in F \; ; \; v_i \in S\}$

الحل: $\forall u \in W : u = (x,y,z) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

$(x,y,z) = \lambda_1(0,1,1) + \lambda_2(1,0,1)$

$(x,y,z) = (\lambda_2, \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \; & x = \lambda_2 \\ & y = \lambda_1 \\ & z = \lambda_1 + \lambda_2 = x + y \end{aligned}\right\} \Rightarrow W = \{(x,y,x+y) : x,y \in \mathbb{R}\}$$

و.هـ.م

تعريف: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F ولتكن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة جزئية في الفضاء V نقول عن المجموعة $W = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i ; \lambda_i \in F, v_i \in S\}$ انها فضاء شعاعي جزئي في V المولد بالمجموعة S ونرمز لذلك بالرمز $W = Span(S)$ ((الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بعناصر S)) ونسمي عناصر S بمولدات الفضاء الجزئي W.

مثال:

ليكن: $V = \mathbb{R}_2[t]$ مجموعة كل الحدوديات من الرتبة 2 بالنسبة لـ $\mathbb{R}$

$V = \mathbb{R}_2[t] = at^2 + bt + c \; : \; a,b,c \in \mathbb{R}$

اذا كان V فضاء شعاعي وكانت

$S = \{f_1 = t^2 + 2t + 1, f_2 = t + 1, f_3 = 1\}$

بين أن $Span(S) = V$

الحل: $\forall f = at^2 + bt + c \in F$

$\therefore f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$

$= \lambda_1(t^2 + 2t + 1) + \lambda_2(t+1) + \lambda_3(1)$

$at^2 + bt + c = \lambda_1 t^2 + (2\lambda_1 + \lambda_2)(t) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \; & a = \lambda_1 \\ & b = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ & c = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} & \lambda_1 = a \in \mathbb{R} \\ & \lambda_2 = b - 2a \in \mathbb{R} \\ & \lambda_3 = c - a - b + 2a = c + a - b \in \mathbb{R} \end{aligned}\right.$$

أي يوجد $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}:$

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$$

ومنه $V = Span(S)$

برهنة:

ليكن V فضاء شعاعي معرف على الحقل K ولتكن

$W_1 = Span(S_1) : S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$W_2 = Span(S_2) : S_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$

اذا كان $S_1 \subseteq W_2$ فإن $W_1 \subseteq W_2$

الإثبات: $\forall u \in W_1 : \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ و

$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : v_i \in S_1 \subseteq W_2$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \lambda_i v_i \in W_2$

$\Rightarrow u = \sum \lambda_i v_i \in W_2$

ومنه $W_1 \subseteq W_2$

و.هـ.م

ملاحظة:

- ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل K ولتكن S_1, S_2 مجموعات جزئية في V: اذا كان:

1) $\begin{cases} S_2 \subseteq W_1 = Span(S_1) \\ S_1 \subseteq W_2 = Span(S_2) \end{cases} \Rightarrow W_1 = W_2$

2) ان الفضاء الشعاعي الجزئي $W_1 = Span(S_1)$ هو أصغر فضاء شعاعي جزئي في V و يحوي S_1

مثال: $V = \mathbb{R}^3$

- $S_1 = \{v_1 = (0,1,1), v_2 = (1,0,1)\}$

$W_1 = Span(S_1) = \{(x, y, x+y) \in \mathbb{R}^3\}$

- $S_2 = \{(1, 1, 2)\}$

$S_2 \subseteq W_1$

$W_2 = Span(S_2) = \{\lambda(1,1,2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

$= \{(\lambda, \lambda, 2\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

$W_2 \subseteq W_1$

انتهت المحاضرة.